

普通高等教育“十五”国家级规划教材

结构力学

（上册）

朱慈勉　主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

Structural Mechanics (Volume I)

Zhu Cimian



普通高等教育“十五”国家级规划教材

结构力学

(上册)

朱慈勉 主编

高等教育出版社

内容提要

本书属普通高等教育"十五"国家级规划教材，是按照教育部力学课程教学指导委员会拟定的《结构力学课程教学基本要求》编写的，旨在适应当代工程概念分析及概念设计的理念和需要。本书的特点是：以结构力学的基本概念、基本原理及其科学运用为主线；以认知规律为出发点；以工程实践为背景；以素质与能力的提高为目标。本书是同济大学有关教师在长期从事结构力学教学和科研以及工程实践的基础上写成的，体现了作者有关"概念结构力学"的基本悬想。

全书分上、下两册。上册共7章，主要内容包括静定结构部分以及力法和位移法。下册共5章，主要内容包括矩阵位移法、超静定结构的实用计算方法与概念分析、结构动力学、结构的稳定性和极限荷载，并附有平面刚架静力分析的源程序及说明。

本书概念清晰、内容简明、深入浅出和联系实际。在介绍解题方法的同时更注重"就事论道"和"由技入道"，力求使读者深刻领会客观规律并掌握事物的本质。另外，研制了CAI教学软件光盘，通过动画生动地展现教学内容并积极引发课堂讨论，可供教师方便地实现多媒体教学。

本书可作为高等学校土木、交通、水利、机械和力学等各专业的结构力学教材，也可作为相关专业工程技术人员等的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学(上册)/朱慈勉主编．—北京：高等教育出版社，2004.1
ISBN 7-04-013079-3

Ⅰ．结…　Ⅱ．朱…　Ⅲ．结构力学-高等学校-教材　Ⅳ．O342

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第105278号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	787×1092　1/16		
印　　张	15	版　　次	2004年1月第1版
字　　数	360 000	印　　次	2004年1月第1次印刷
插　　页	1	定　　价	17.90元



主编简介

朱慈勉(Zhu Cimian)　同济大学土木工程学院教授，博士学位，博士研究生导师，结构力学教研室主任，国家教育部高等学校力学基础课程教学指导委员会委员，上海市土木工程学会会员，国家一级注册结构工程师，国家注册监理工程师。

1970年毕业于清华大学工程力学数学系固体力学专业，此后几年在国家第一机械工业部第八设计院从事结构设计工作，1978年进入同济大学。长期从事结构力学等课程的教学和结构工程领域的科学研究与工程实践，曾多次获得国家级和上海市科技进步奖和教学成果奖，发表学术论文数十篇。提出了"概念结构力学"与"计算结构力学"并进的学科发展思想，并付诸于教学实践。1997年和2003年曾先后获得上海市育才奖和高等学校名师奖。

序

现代工程技术的日益进步和电子计算机的飞速发展对结构力学学科产生了深远的影响。一方面,大型工程结构在各种复杂因素作用下的分析,要求强化结构力学基本概念的综合运用和概念设计的理念;另一方面,运算能力的剧增又要求发展与之相适应的结构分析理论与方法。这就促使传统结构力学向"概念结构力学"和"计算结构力学"两个方向的纵深发展。高等学校工程类专业的结构力学课程教学需要与之相适应,以利于培养出满足现时代需要的专业人才。

本书的编写力求改变以往课程教学中常以介绍传统的结构力学计算方法为主的状况,而是致力于结构力学基本概念的培养及其运用能力的提高。结构计算电子化后,许多传统的计算方法本身可能已逐步失去实际应用价值,但其相应的基本概念和基本原理在结构分析中仍具有重要地位和价值。实际上,力学基本概念和基本原理在工程中的综合运用能力,则正是当代结构工程领域科技人员所应具备的最重要的素质。

本书的特点是:以结构力学的基本概念、基本原理及其科学运用为主线;以认知规律为出发点;以工程实践为背景;以素质与能力的提高为目标。本书注意概念清晰、内容简明、深入浅出和联系实际。在介绍解题方法的同时更注重"就事论道"和"由技入道",力求使学生深刻领会客观规律并掌握事物的本质。

本书是同济大学有关教师在长期从事结构力学教学、科研以及工程实践的基础上写成的,体现了作者有关"概念结构力学"的基本思想。全书分上册(共7章)、下册(共5章),由朱慈勉主编并编写第1、5、9、10章。参加本书编写工作的还有江利仁(第3章)、张伟平(第6章部分内容、第12章),李建新(第6章部分内容、第11章及附录),龙仲芬(第4、7章)和王琳鸽(第2、8章)。书中强调了有关线弹性体系的基本假设,以及各种基本理论、基本方法以及公式的适用前提;突出了静定和超静定结构受力状态的概念分析,并纳入了对于概念分析有重要作用的剪力分配法的基本原理;提出了诸如利用瞬时中心求解带斜杆的超静定刚架、运用联合法绘制影响线和利用电模拟分析杆件并联、串联关系等行之有效的分析方法;编写了相当数量的有关概念分析和与工程实践密切相关的例题和习题,其中不少是近年来的期终试题或研究生入学考试试题。

本书承蒙北京建筑工程学院刘世奎教授审阅,并提出了宝贵的修改意见。哈尔滨工业大学王焕定教授、同济大学朱伯钦教授也对本书提出了许多有益的建议。在此,谨向他们表示衷心的感谢。此外,同济大学教务处对本书的出版高度重视并给予大力支持,冷金荣、顾绍义、罗文钊等精心制作了本书的电子文稿,一并表示感谢。

欢迎批评和指正。

朱慈勉

2003年11月于同济大学

主要符号表

A	面积、振幅(多自由度)
$\mathbf{A}$	位移幅值向量、主振型向量、主振型矩阵
a	振幅(单自由度)
$\boldsymbol{B}$	应变矩阵
c	支座广义位移、粘滞阻尼系数
C	弯矩传递系数
$\boldsymbol{C}$	阻尼矩阵
c_{cr}	临界阻尼系数
d	结间距离
E	弹性模量
E_P	势能
f	矢高、工程频率
F	简谐荷载幅值
F_P	集中荷载
$\boldsymbol{F}$	结点荷载向量
F_H	水平推力
F_x、F_y	水平(x)、垂直(y)方向的分力
F_N	轴力
F_Q	剪力
F_Q^L、F_Q^R	截面左、右的剪力
F_Q^F	固端剪力
F_{Pe}	欧拉临界荷载
F_{Pcr}	临界荷载
F_{Pu}	极限荷载
F_P^+	可破坏荷载
F_P^-	可接受荷载
F_S	弹性力
F_I	惯性力
F_D	阻尼力
F_R	广义反力、反力合力
$\bar{\boldsymbol{F}}^e$	局部坐标系下单元杆端力向量

$\boldsymbol{F}^e$	整体坐标系下单元杆端力向量
G	切变模量
i	弯曲线刚度
I	惯性矩(截面二次轴矩)
$\boldsymbol{I}$	单位矩阵
k	刚度系数、切应力分布不均匀系数
k_θ	弹簧的转动刚度系数
$\bar{\boldsymbol{k}}^e$	局部坐标系下单元刚度矩阵
$\boldsymbol{k}^e$	整体坐标系下单元刚度矩阵
$\boldsymbol{K}$	结构刚度矩阵
m	质量
$\boldsymbol{m}$	单元质量矩阵
$\bar{m}$	单位杆长的质量
M	力矩、力偶矩、弯矩
$\boldsymbol{M}$	结构质量矩阵
M^L、M^R	截面左、右的弯矩
M^F	固端弯矩
M_u	极限弯矩
M_s	弹性极限弯矩
$\boldsymbol{N}$	形函数矩阵
q	均布荷载集度
R	半径
r	半径、反力影响系数
S	静矩(截面一次矩)、转动刚度、影响量
t	时间
T	周期、动能
$\boldsymbol{T}$	坐标转换矩阵
U	应变能
u	x 方向位移
v	y 方向位移、挠度、速度
W	功、计算自由度、重量、弯曲截面系数
W_u	截面塑性抵抗矩
$\boldsymbol{w}$	单元位移向量
X	广义多余约束力、广义多余未知力
Y	振型函数
y	位移
Z	广义未知位移
$\boldsymbol{Z}$	广义未知位移向量

α	线膨胀系数、初相角
β	弦转角、动力系数
γ	剪力分配系数
γ_0	平均切应变
Δ	广义未知位移
$\boldsymbol{\Delta}$	位移向量
$\bar{\boldsymbol{\Delta}}^e$	局部坐标系下单元杆端位移向量
$\boldsymbol{\Delta}^e$	整体坐标系下单元杆端位移向量
δ	柔度系数、位移影响系数
$\boldsymbol{\delta}$	柔度矩阵
ε	线应变
ε_s	屈服应变
μ	弯矩分配系数
κ	曲率
φ	转角
θ	截面转角、干扰力频率
ξ	阻尼比
ρ	材料密度
σ_b	强度极限
σ_s	屈服应力
σ_u	极限应力
ω	自振频率(圆频率)

目　录

第1章 绪 论

§1-1 结构力学的研究对象和基本任务

建筑物、构筑物或其他工程对象中支承和传递荷载而起骨架作用的部分称为工程结构。例如,房屋建筑中由楼板、梁、柱、剪力墙以及基础等组成的结构体系,水工建筑物中的大坝和闸门,公路和铁路桥梁、隧道和涵洞,飞机、汽车中的受力骨架等,都是工程结构的典型例子。

工程结构的受力特性和承载能力与结构的几何特征有着密切的联系。从广义来说,结构可按其几何特征分为以下三类:

1. 杆系结构

杆系结构是由若干个杆件相互联结而组成的结构。杆件的几何特征是其横截面上两个方向的几何尺度远小于长度。梁、刚架、拱和桁架等都是杆系结构的典型形式。

2. 板壳结构

板壳结构也称为薄壁结构,它的几何特征是其厚度远小于其余两个方向上的尺度。房屋建筑中的楼板、壳体屋盖(图1-1),飞机和轮船的外壳等均属于板壳结构。

3. 实体结构

实体结构也称三维连续体结构,其几何特征是结构的长、宽、高三个方向的尺度大小相仿。重力式挡土墙(图1-2)和水工建筑中的重力坝等属于实体结构。



图 1-1

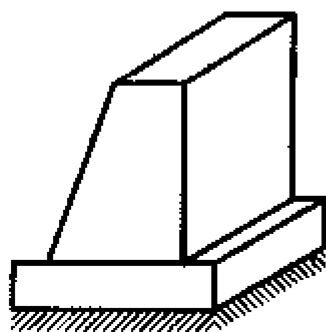


图 1-2

结构力学是研究结构的合理形式以及结构在受力状态下内力、变形、动力反应和稳定性等方面的规律性的学科。研究的目的是使结构满足安全性、适用性和经济方面的要求。具体来说,结构力学的基本任务主要包括以下几个方面:

(1) 根据功能和使用等方面的不同要求和结构的组成规律,研究结构的合理形式。

(2) 研究结构内力、变形、动力反应和稳定性计算的理论和方法。

(3) 研究由结构受力结果确定外界作用信息,或是根据外界作用信息,确定结构的有关信息,或是对结构的受力反应进行控制的理论和方法。

结构力学是结构工程类专业的一门重要的技术基础课，它与先修的理论力学、材料力学以及后继的弹塑性力学之间有着密切的联系。前者是属于基础力学；通常的结构力学是以杆系结构为主要研究对象，也称为狭义结构力学；弹塑性力学则以实体结构和板壳结构为主要研究对象。

现代工程技术的日益进步和电子计算机的飞速发展对结构力学学科产生了深远的影响。一方面，大型工程结构在各种复杂因素作用下的分析要求强化结构力学基本概念的综合运用和概念设计的理念；另一方面，运算能力的剧增要求发展与之相适应的结构分析理论和方法，这就促进了传统结构力学向概念结构力学和计算结构力学两个方向的纵深发展。为了适应科技的进步，结构工程领域科技人员的角色和作用也正在发生许多根本性的改变，这就决定了结构力学的课程教学需以力学基本概念及其科学运用为主线；以对客观世界的认知规律为出发点；以工程实践为背景；以素质和能力的提高为根本目标。

§1-2 结构的计算简图

一个实际结构的受力情况往往是很复杂的，如果完全按照实际结构的工作状态进行分析，事实上会遇到一定的困难，同时也是不必要的，因而在对实际结构进行力学分析之前，需要作出某些简化和假设。在计算时常把实际结构中的一些次要因素加以忽略，但是又要能反映出实际结构的主要受力特征。这种经过简化了的结构图形称为结构的计算简图。在力学计算中，结构的计算简图就是实际结构的代表。结构计算简图的合理选择，在结构分析中是一个极为重要的环节，也是必须首先要解决的问题。

结构计算简图的选择主要有以下原则：

(1) 保留主要因素，略去次要因素，使计算简图能反映出实际结构的主要受力特征，这就是“存本去末”的简化原则。

(2) 根据需要与可能，并从实际出发，力求使计算简图便于计算，这就是“计算简便”的简化原则。

此外，根据不同的要求与具体情况，对于同一实际结构可选取不同的计算简图。例如，在初步设计阶段可选取较为粗糙的计算简图，在施工图设计阶段可选取较为精细的计算简图；采用手算时可选取较为简单的计算简图，采用电算时可选取较为精确的计算简图；在动力计算时，由于计算比较复杂，可选取较为简单的计算简图，在静力计算时，由于计算比较简单，可选取较为精确的计算简图等。

在选择计算简图时，需要对实际结构的情况进行多方面的简化。以下就作简要的介绍。

1. 结构体系的简化

杆系结构可分为平面杆系结构和空间杆系结构两大类。实际结构一般都是空间结构，这样才能抵御来自各个方面的荷载。但在多数情况下常可以忽略一些次要的空间约束的作用，或是将这种空间约束作用转化到平面内，从而将实际结构分解为平面结构，使计算得以简化。

2. 杆件的简化

杆系结构中的杆件，在计算简图中均用杆件的轴线来表示，杆件的长度一般可用轴线交点间的距离表示。

3. 结点的简化

杆件间相互联结处称为结点。木结构、钢结构和混凝土结构的结点，具体构造形式虽不尽相同，但其结点的计算简图常可归纳为以下两种类型：

（1）铰结点

铰结点的特征是所联结各杆可以绕铰作自由转动，因此可用一理想光滑的铰来表示。这种理想情况，在实际工程中很难实现。例如，图 1－3a 所示为木屋架的下弦中间结点构造图，此结点处各杆并不能完全自由地转动，但是由于杆件间的联结对于相对转动的约束不强，受力时杆件发生微小的相对转动还是可能的。因此，将这种结点近似地作为铰结点处理后（图 1－3b），不致引起大的误差。

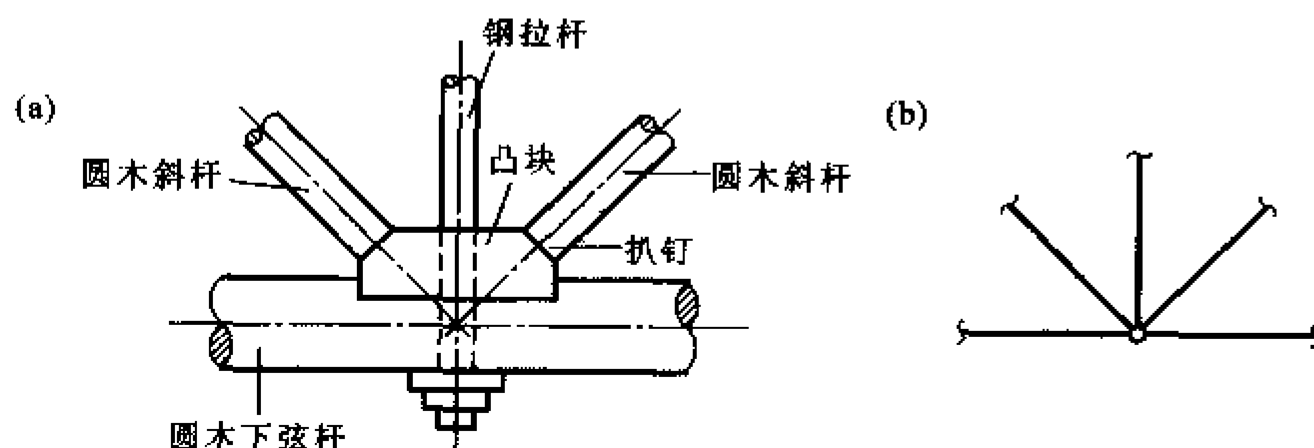


图 1－3

（2）刚结点

刚结点的特征是所联结杆件之间不能在结点处产生相对转动，即在刚结点处各杆之间的夹角在变形前后保持不变。

图 1－4a 所示为混凝土多层刚架边柱与横梁的结点构造图。由于边柱与横梁间为整体浇筑，同时横梁的受力钢筋伸入柱内并满足锚固长度的要求，因而就保证了横梁与边柱能相互牢固地联结在一起，构成了刚结点，其计算简图如图 1－4b 所示。

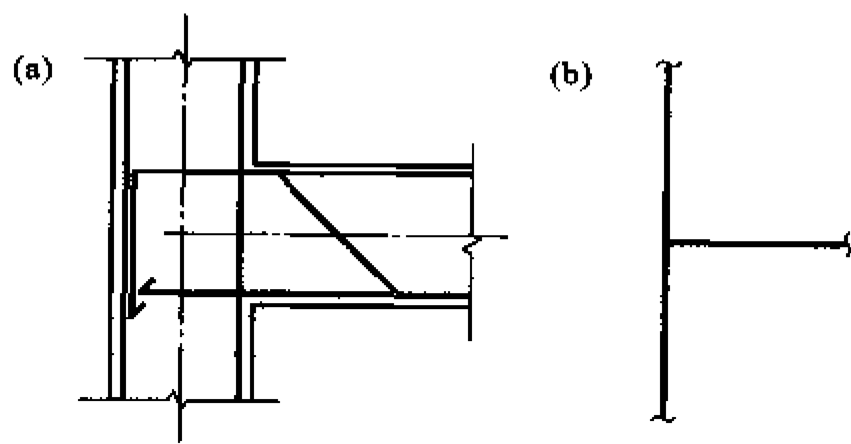


图 1－4

4. 支座的简化

结构与基础相联结的部分称为支座。结构所受的荷载通过支座传递给基础和地基。支座对结构的反作用力称为支座反力。平面结构的支座形式主要有以下五种类型：

（1）活动铰支座

桥梁结构中所用的辊轴支座（图 1－5a）及摇轴支座（图 1－5b），都是活动铰支座的实例。

活动铰支座的机动特征是结构可绕铰 A 作自由转动，并允许沿支承面 $m-n$ 有微量的移动，但限制铰 A 沿垂直于支承面方向的移动。根据活动铰支座的机动特征和受力特征，可用图 1－5c 所示一根竖向支座链杆的计算简图来代表。

（2）固定铰支座

固定铰支座的机动特征是结构仍可绕铰 A 转动，但沿水平和竖向的移动受到限制，如图 1－6a 所示。此时，支座反力 F_{RA} 仍通过铰 A 的中心，通常分解成水平和竖向的分反力 F_{xA}、F_{yA}。

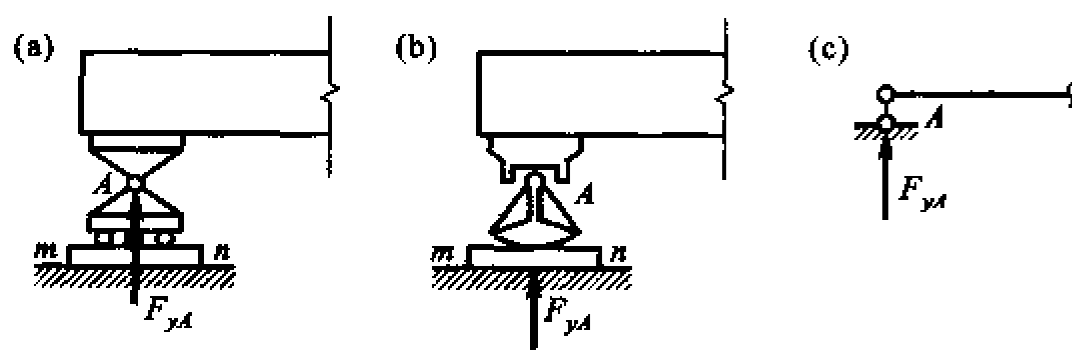


图　1-5

根据固定铰支座的机动特征和受力特征,可用如图 1-6b 或图 1-6c 所示的计算简图表示。

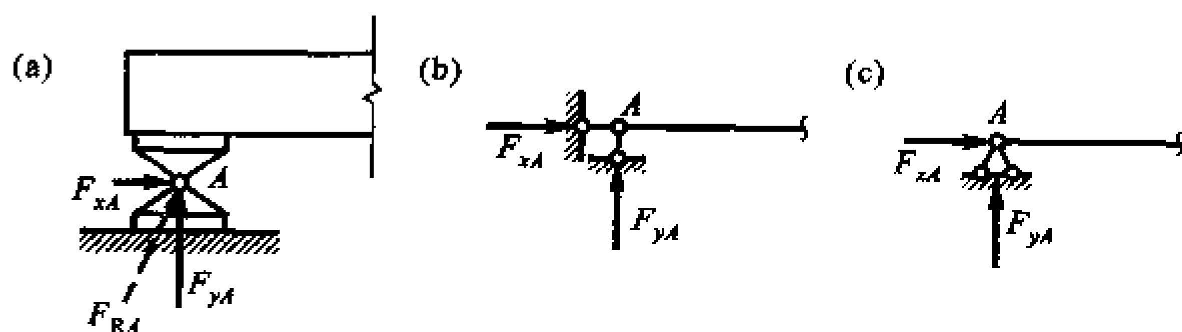


图　1-6

(3) 固定支座

图 1-7a 所示一悬臂梁,当梁端插入墙身有一定深度时,则可视作固定支座。固定支座的机动特征是结构与支座相联结的 A 处,既不能发生转动,也不能发生水平和竖向的移动。相应的支座反力,通常可用反力矩 M_A 和水平及竖向分反力 F_{xA}、F_{yA} 来表示(图 1-7b)。图 1-7c 所示为插入杯形基础的混凝土预制柱,杯口内由细石混凝土填实,当预制柱插入杯口有足够深度时,则杯口面 A 处可视为固定支座,其计算简图如图 1-7d 所示。

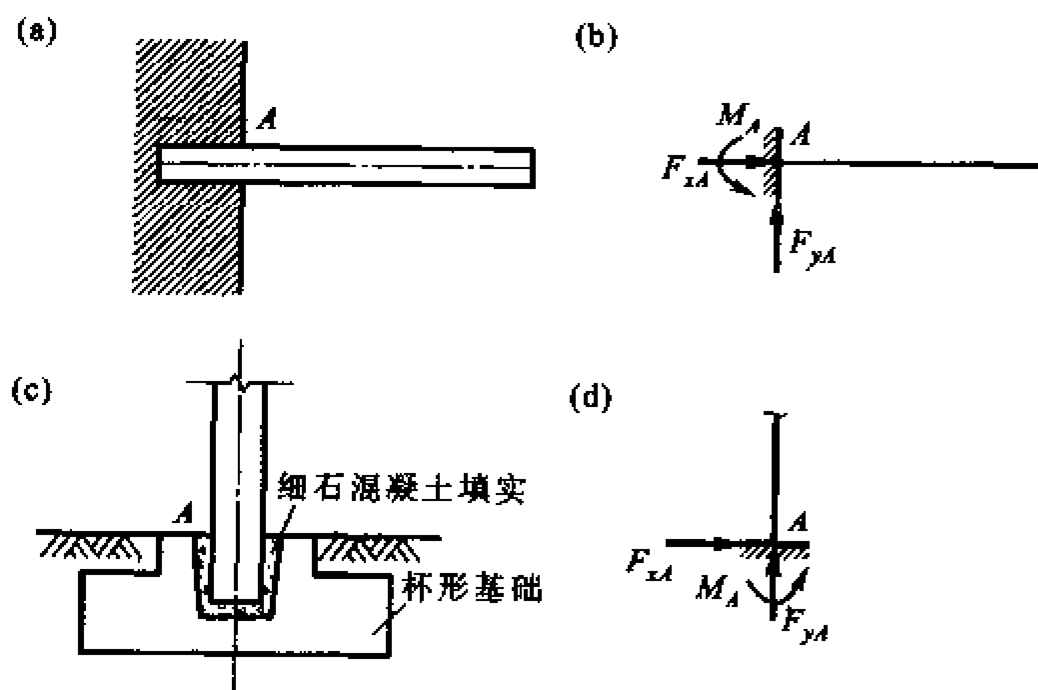


图　1-7

(4) 滑动支座

图 1-8a 所示为滑动支座(亦称定向铰支座)的示意图,这类支座能限制结构的转动和沿一

个方向上的移动，但允许结构在另一方向上有滑动的自由。例如，图1－8a所示的结构在支座处的转动和竖向移动将受到限制，但可沿水平方向有微量滑动，可用两根竖向平行支杆来表示这类滑动支座的机动特征和受力特征(图1－8b)。相应的支座反力有两个：限制竖直方向移动的反力 F_{yA} 和限制转动的反力矩 M_A。

上述四种支座，均假设支座本身是不能变形的，计算简图中相应的支杆也被认为其本身是不能变形的刚性链杆，这类支座称为刚性支座。

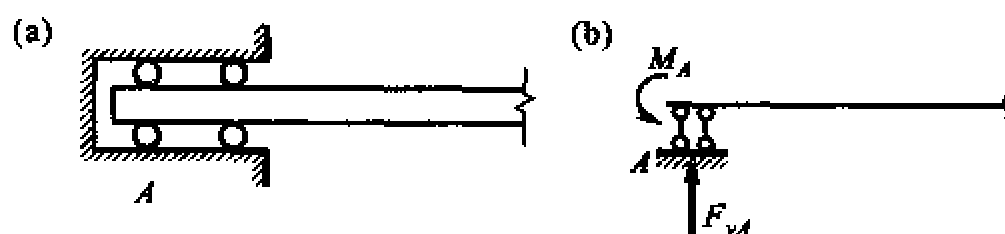


图　1－8

(5) 弹性支座

若要考虑支座本身的变形，则这类支座称为弹性支座。如图1－9a所示的桥面结构，桥面板上的荷载通过纵梁传给横梁，然后由横梁传给主梁，最后由主梁传给桥墩。在荷载的传递过程中，各横梁将起支承纵梁的作用；同时受荷载作用后，中间各横梁将产生弯曲变形而引起竖向位移，此时横梁相当于一个弹簧作用，可用一根竖向弹簧来表示这种支座的性能。它具有一定的抵抗移动的能力，称为抗移弹性支座。例如，图1－9b所示纵梁的各中间支座。另外一种弹性支座具有一定的抵抗转动的能力，称为抗转弹性支座。

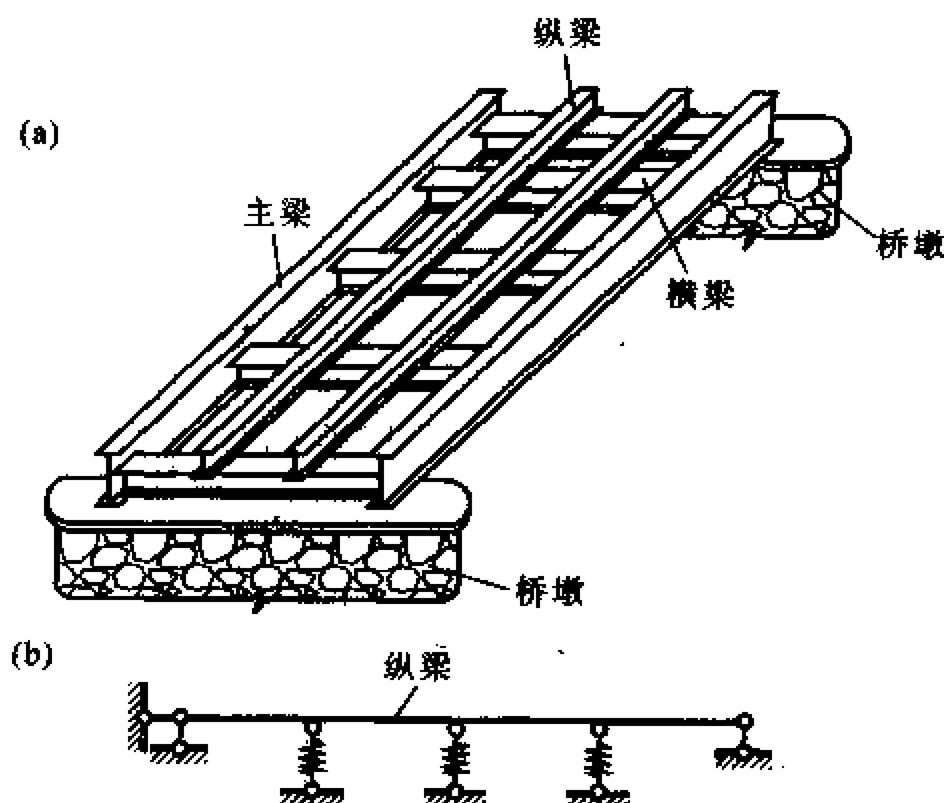


图　1－9

5. 荷载的简化

例如建筑物的楼面荷载一般可简化为竖向均布荷载，侧向风荷载一般可沿建筑物高度方向分段简化为水平均布荷载等。

为了说明实际结构的简化过程，现以图1－10所示混凝土单层工业厂房的实例说明。厂房是由屋架、屋面板、柱子、吊车梁和支撑体系等所构成的空间结构。当它承受屋面竖向荷载时，荷

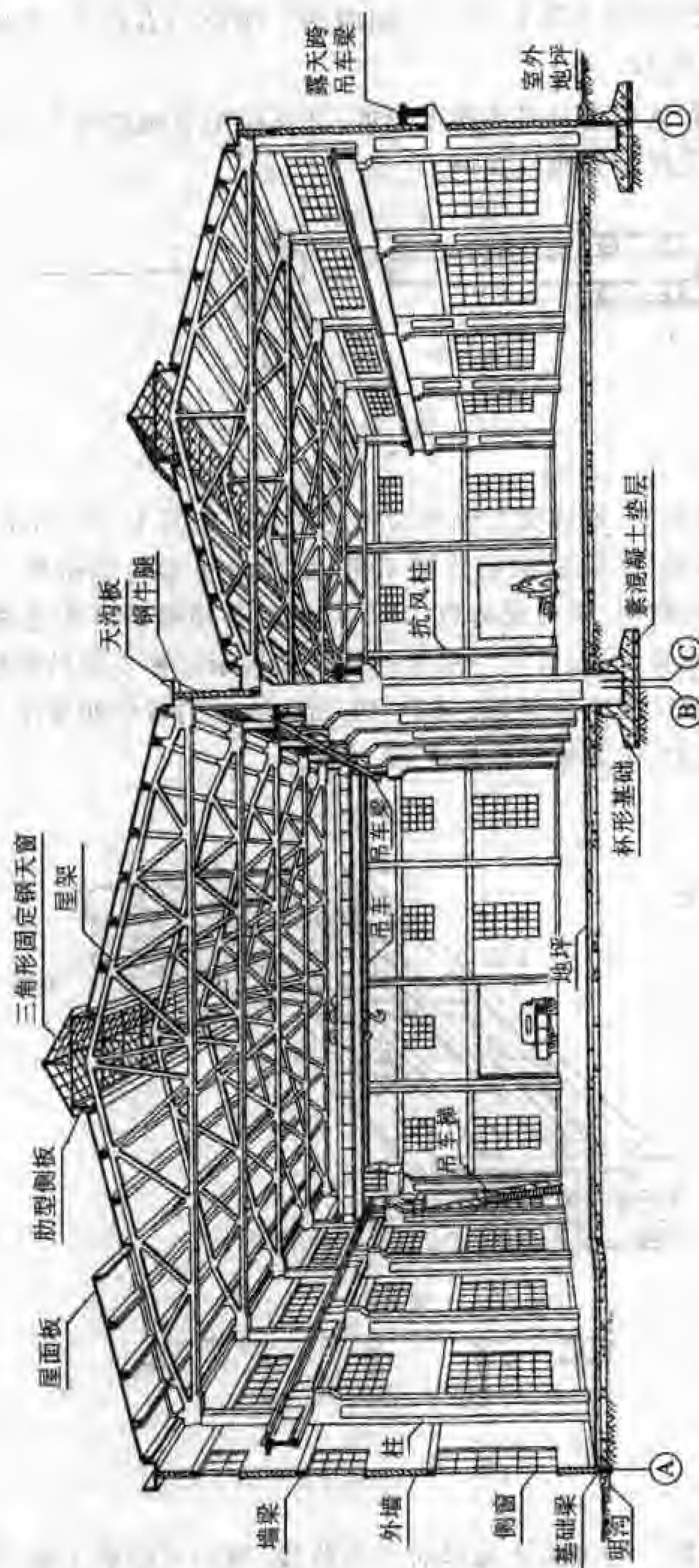

屋面板
肋型侧板
三角形固定钢天窗
屋架
天沟板
钢牛腿
露天跨吊车梁
室外地坪
吊车梁
吊车
吊车梯
抗风柱
地坪
素混凝土垫层
杯形基础
墙梁
柱
外墙
侧窗
基础梁
明沟
A
B
C
D

图 1－10

载先由屋面板传给屋架,再由屋架两端传给柱子直达基础。当它承受侧向风荷载时,屋面上的风荷载由屋架传至柱顶;侧墙上的风荷载一般可简化为均布荷载由墙体传至柱身,最后传达基础。以上两种荷载分别作用时,厂房除端部外的各榀横向结构的受力和变形情况基本相同,因而可以取出其中的一榀进行计算,这样就可将空间结构转化为平面结构来分析。当厂房承受吊车竖向或水平荷载作用时,由于结构纵向联系较弱,不能提供足够的整体刚度,因而可偏于安全地认为上述荷载仅由吊车所在位置的一榀横向结构单独承受,或者是根据经验确定其所承受吊车荷载的百分比。这样,就仍然可以按照平面结构来分析。

厂房的屋架一般可简化为平面理想桁架(见第3章),柱子与屋架之间系通过预埋钢板,在吊装就位以后再相互焊接的,其联接构造可使屋架端部与柱顶不能发生相对线位移,但不能完全阻止两者之间发生相对转动。这时,可以将柱与屋架的联接视为铰结点。在计算屋架的内力时,可以忽略其传递的柱顶剪力而将其单独取出,并用铰支座代替其与柱子之间的相互联结作用,计算简图分别如图1-11a、b所示;在分析柱子的内力时,可以用实体杆代替原屋架,取计算简图为图1-11c所示的柱顶铰结体系。这种结构体系工程上称为排架。

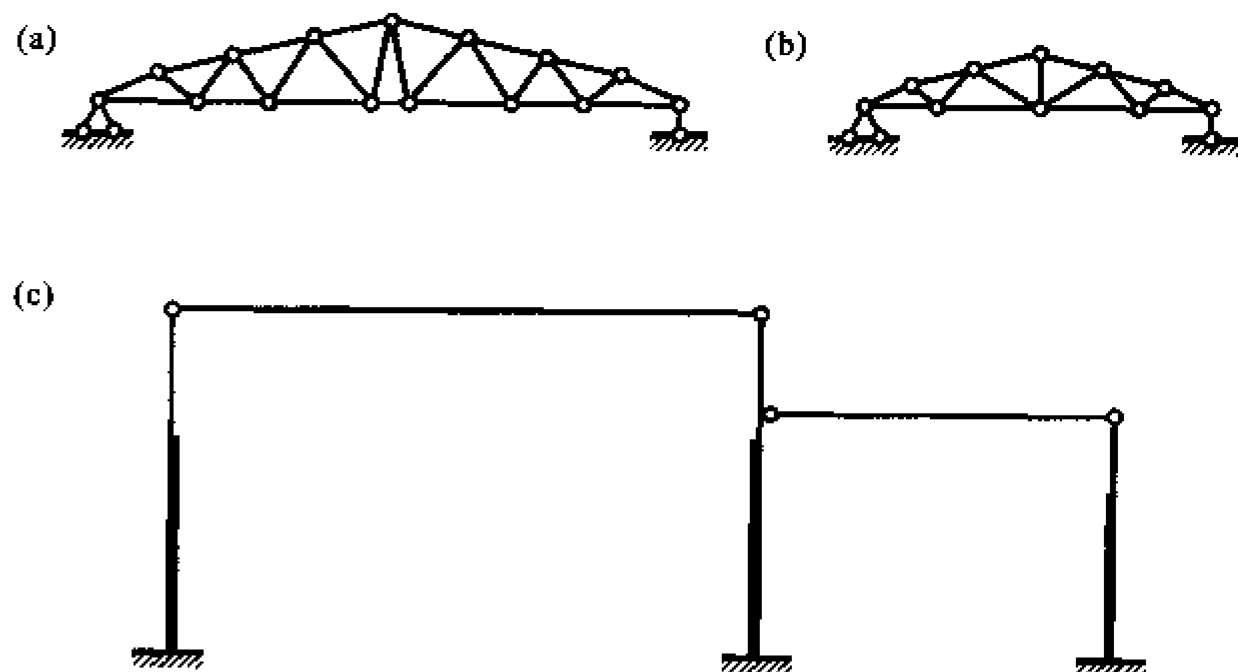


图 1-11

§1-3 结构和荷载的分类

1-3-1 结构的分类

在结构分析中,是用计算简图代替实际结构的。所谓结构分类,实际上是指结构计算简图的分类。杆系结构通常可分为如下的五种类型:

1. 梁

梁是一种受弯构件,它的轴线一般为直线,在竖向荷载作用下支座不产生水平反力。梁可以是单跨的(图1-12a),也可以是多跨的(图1-12b)。

2. 拱

拱的轴线一般为曲线,拱在竖向荷载作用下支座会产生水平反力,从而可以减小拱截面上的

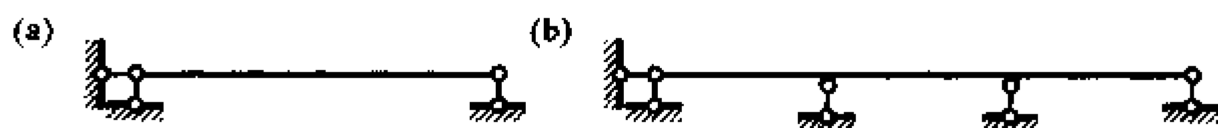


图 1-12

弯矩(图1-13)。

3. 刚架

刚架通常由直杆组成,其组成特点是杆件联结处的结点是刚结点(图1-14)。刚架有时也称为框架。

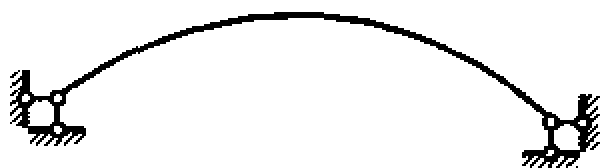


图 1-13

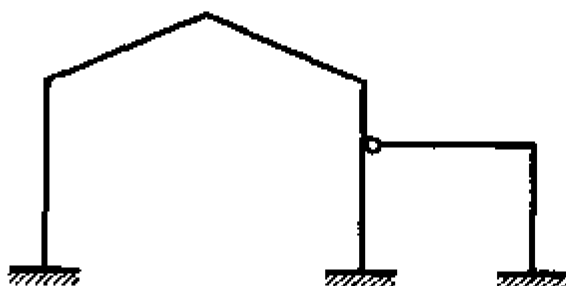


图 1-14

4. 桁架

桁架由直杆组成,其组成特点是各杆相联结处的结点均为铰结点(图1-15)。当桁架承受结点荷载时,各杆内只产生轴力。

5. 组合结构

组合结构是由桁架杆件和梁(图1-16a)或桁架杆件和刚架(图1-16b)等组合而成的结构,其受力特点为除桁架杆件只承受轴力外,其余受弯杆件能同时承受轴力、剪力和弯矩。

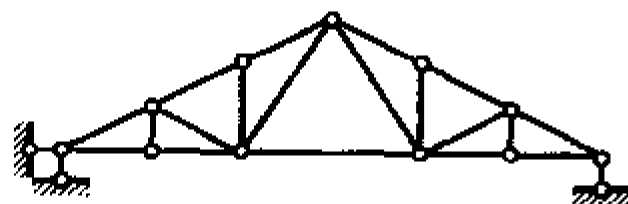


图 1-15

上述五种类型的杆系结构是最基本的结构类型,此外还有悬索结构等结构类型。

杆系结构有平面结构与空间结构之分。当结构各杆件的轴线与作用荷载均位于同一平面时,称为平面杆系结构,或者简称为平面结构;不符合上述条件的结构称为空间杆系结构,或者简称为空间结构(见§3-6)。

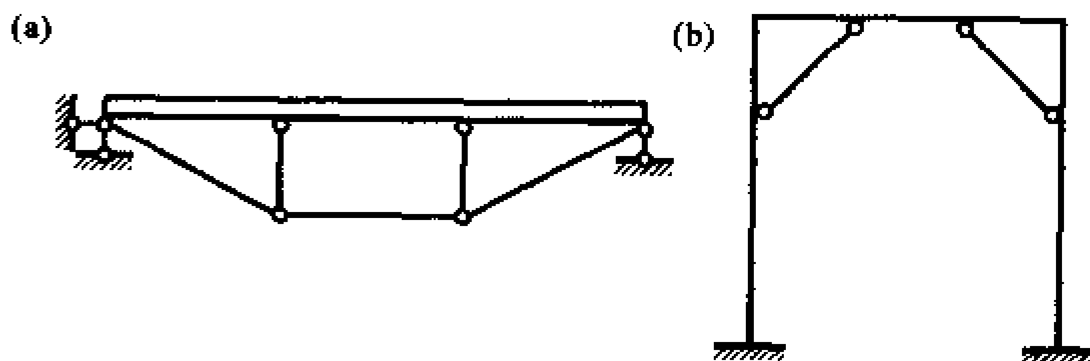


图 1-16

1-3-2 荷载的分类

荷载是主动作用于结构上的外力。例如,结构本身的自重,工业厂房结构上的吊车荷载,行驶在桥梁上的车辆荷载,作用于水工结构上的水压力或土压力等。

根据荷载作用时间的久暂及荷载作用的性质,可将荷载扼要地作如下的分类:

1. 按荷载作用时间的久暂划分

(1) 恒载

永久作用在结构上的不变荷载称为恒载。例如,结构本身的自重以及永久固定在结构上的设备重量等。在结构的使用阶段,上述荷载的大小、位置和方向均不改变。

(2) 活载

临时作用在结构上的可变荷载称为活载。例如,列车、吊车荷载,人群、风、雪荷载等。在具体进行结构计算时,通常把恒载及有些活载(如人群、风雪荷载)在结构上的作用位置视作是固定的,这类荷载又称为固定荷载。有些活载(如吊车、汽车和列车荷载)在结构上的作用位置是移动的,这类荷载又称为移动荷载。

2. 按荷载作用的性质划分

(1) 静力荷载

静力荷载的大小、位置和方向并不随时间而变化,荷载的加载过程比较缓慢,一般设想由零逐渐增加到最终值。因此在静力荷载作用下,认为结构上的质量并不产生显著的加速度和相应的惯性力,从而不会使结构引起振动。结构的自重和其他恒载都是静力荷载的实例。

(2) 动力荷载

动力荷载是随时间迅速变化的荷载,在动力荷载作用下,结构的质量将产生显著的加速度和相应的惯性力,因而引起结构明显的运动或振动。例如,机器运转时由于偏心质量的存在所产生的荷载,地震时由于地面运动对结构物所引起的动力作用,波浪压力对水工结构物的冲击,其他如因爆破所引起的气浪冲击波,风的脉动荷载等,都是动力荷载的实例。

§1-4 基本假设

除了在确定结构的计算简图时所作的各种简化之外,在作结构分析时还常可以根据实际情况对结构在受力状态下的行为特征进行假设,从而使计算简化。

通常的结构力学有以下三条基本假设:

(1) 结构体是连续的,而且在外力作用下仍保持连续。

(2) 胡克(Hooke)定律:处于静力平衡状态的结构体上任意点的位移 u(图 1-17)可表达为

$$u = a_1 F_{P1} + a_2 F_{P2} + \cdots + a_n F_{Pn} \qquad (1-1)$$

式中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为常数,它们与荷载 $F_{P1}, F_{P2}, \cdots, F_{Pn}$ 的大小无关,但对于不同的位移以及荷载不同的作用位置和方向来说,这些常数是不同的。

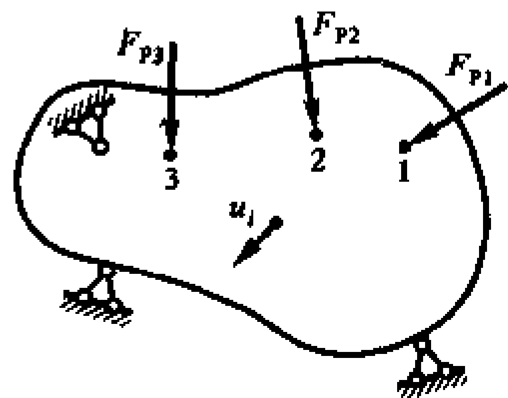


图 1-17

(3) 若将所有的外部作用撤消,则结构回复到原先的无应力

状态。

符合以上三条基本假设的结构体称为线弹性体。1859年克希霍夫(Kirchhoff)提出了有关线弹性体系解的惟一性定理[①]。按照这一理论,线弹性体系的弹性变形与外部作用力之间具有一一对应关系,即在一定的外部作用下,线弹性体系的内力和变形都是惟一的。上述解的惟一性定理在线弹性体系的受力分析中具有重要地位,此时的受力分析称为线性分析。

将以上基本假设(2)、(3)相结合,可以证明线弹性体系的叠加原理[②],即式(1-1)不仅适用于 $F_{P1}:F_{P2}:\cdots:F_{Pn}$ 保持不变的荷载系,而且也适用于任意一组荷载矢量 $\boldsymbol{F}_{P1},\boldsymbol{F}_{P2},\cdots,\boldsymbol{F}_{Pn}$。换言之,式(1-1)成立与加载次序无关;常数 a_1 与荷载矢量 $\boldsymbol{F}_{P2},\boldsymbol{F}_{P3},\cdots,\boldsymbol{F}_{Pn}$ 无关;常数 a_2 与荷载矢量 $\boldsymbol{F}_{P1},\boldsymbol{F}_{P3},\cdots,\boldsymbol{F}_{Pn}$ 无关;以此类推。以上叠加原理在线弹性体系结构力学中具有重要的应用价值。

由结构力学的上述基本假设,还可以导出线弹性体系的互等定理(见§5-7)等重要结论。

实际工程中有一些结构体系并不满足线弹性体系的基本假设,这样的结构体系称为非线性体系,此时体系的受力分析称为非线性分析。引起结构受力性态为非线性的原因可归结于材料非线性和几何非线性两个方面。

所谓材料非线性,是指结构材料的物理性质是非线性的,包括非线性弹性,或者是材料已进入塑性的情况。例如,图1-18所示的简支钢梁当荷载较大时跨中附近(阴影部)的材料已进入塑性阶段。此时,梁的变形和内力与荷载之间即呈非线性关系。所谓几何非线性是指结构的变形或位移较大,乃至必须在结构变形后的位形上应用平衡条件。图1-19a所示为一偏心受压柱,在竖向荷载作用下,若柱顶的侧移 Δ 相对于荷载偏心距 e 而言是微小的,则可以近似地在柱子的原始位形上应用平衡条件,即认为柱底弯矩 $M_A=F_P\cdot e$;但若柱子的侧移 Δ 较大,相对于偏心距 e 而言不能忽略时,则必须在变形后的位形上建立平衡条件,即有 $M_A=F_P(e+\Delta)$。因为 Δ 本身又是 F_P 的函数,所以柱子的变形和内力都将是非线性的。又如图1-19b所示的体系,竖向荷载作用于 A 结点时,体系在虚线位置到达平衡。由于体系的位移较大,在计算两链杆的内力时,必须在变形后的虚线位置上建立

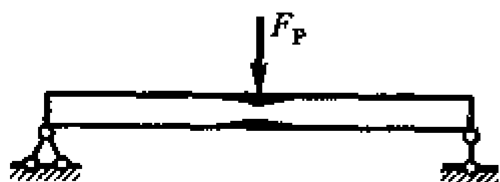


图 1-18

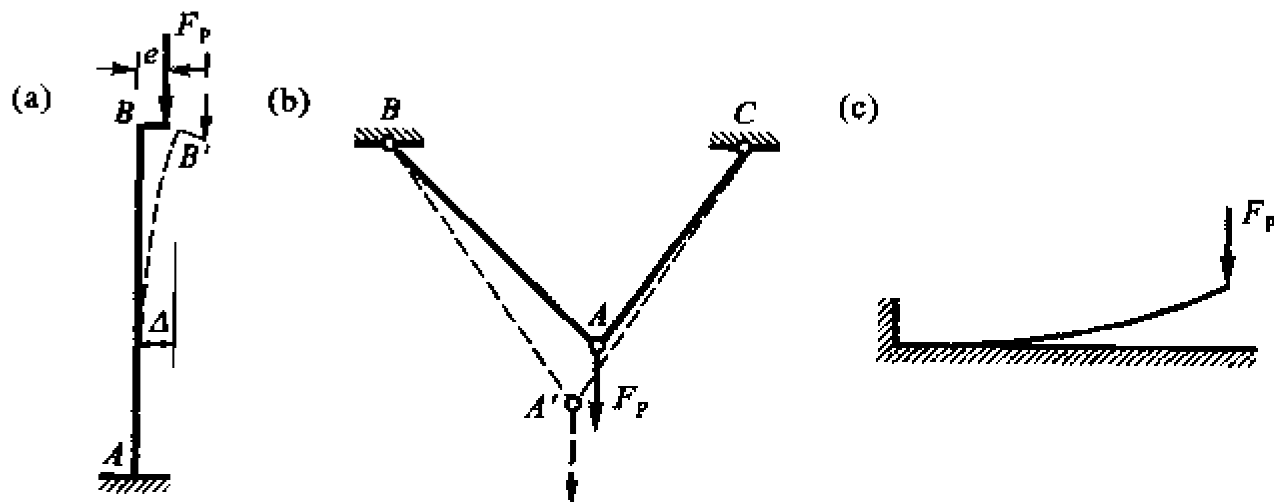


图 1-19

①、② 见主要参考文献12。

平衡方程。因为体系变形后的位置本身与荷载有关，所以杆件的变形和内力与荷载之间亦呈非线性关系。图 1－19c 所示为一曲杆受竖向荷载作用，曲杆的支承条件本身与杆件的变形相关，这种边界条件的非线性亦可归入几何非线性的范畴。实际上，无论变形或位移的大小如何，静力平衡总是在结构变形后的位形上实现的；只是当结构的变形或位移很小时，忽略变形后与变形前之间的差异不至于导致明显的分析误差。

对于非线性体系，解的惟一性定理和叠加原理不再成立。例如，图 1－20a、b 所示体系在相同荷载下可有Ⅰ、Ⅱ两种不同的受力状态。当荷载变化时，非线性体系的变形和内力一般不与荷载按同样的规律变化，此时数个荷载共同作用的结果也并不等于它们单独作用产生结果的叠加。

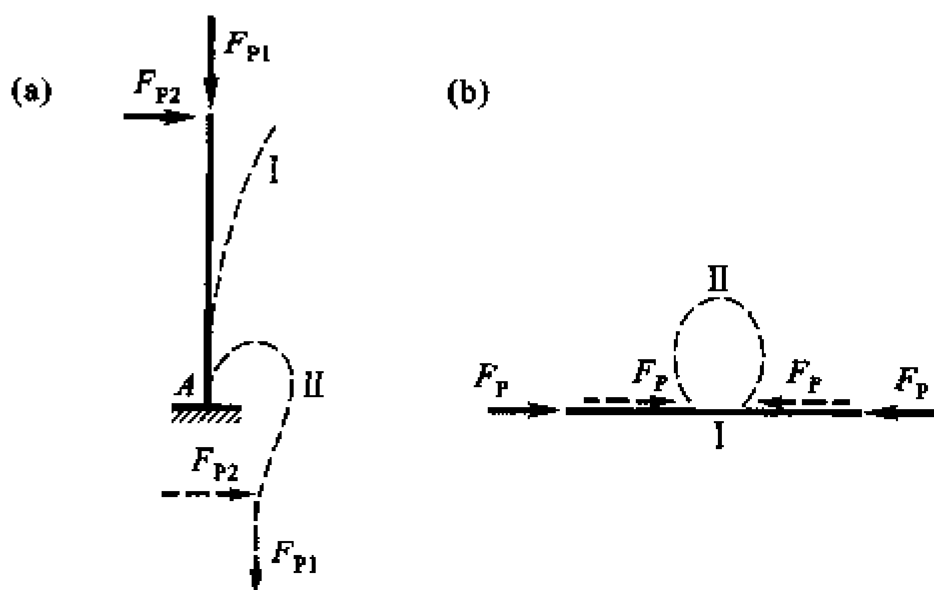


图　1－20

对于大部分实际结构来说，在正常使用状态下材料的应力－应变关系接近（如钢结构）或近似为（如混凝土结构）线性关系，而且结构的变形和位移都是微小的。此时，上述线弹性体系的三条基本假设均成立，于是可以应用解的惟一性定理和叠加原理。本书前十章将主要讨论结构的线性分析问题。

习　题

1－1　试说明杆系结构、板壳结构与实体结构在几何特征方面的主要差别。

1－2　试说明结构力学的基本任务和结构力学课程学习中应注意的问题。

1－3　试回答：什么是结构的计算简图？如何选择结构的计算简图？

1－4　试说明移动荷载与动力荷载之间的区别与可能存在的联系。

1－5　试说明什么是线弹性体，线弹性体系的基本受力特性以及胡克定律的基本含义。

1－6　试说明材料非线性和几何非线性体系的基本受力特性。

第2章 平面体系的几何构造分析

§2-1 概 述

若干个杆件以某种方式相互联结，并与基础相联，则构成杆件体系。如果体系的所有杆件和联系以及外部作用均处在同一平面内，则称为平面体系。按照几何学的原理对体系发生运动的可能性进行分析，称为体系的几何构造分析。

体系几何构造分析的主要目的是确定什么样的体系可以作为结构。实际结构在承受荷载后都不可避免地会产生内力与变形，但对于工程结构来说，一般不允许其相对于基础存在刚体运动的可能性。在不计材料变形的前提下，若体系的位形是不可以改变的，则称为几何不变体系，或者称该体系的几何构造是稳定的；若体系的位形是可以改变的，则称为几何可变体系，或者称该体系的几何构造是不稳定的。图 2-1a 所示的铰结三角形体系是一种最基本的几何不变体系；而图 2-1b 所示的铰结四边形体系就属于几何可变体系。对于几何可变体系，任意小的干扰力就可以使它发生位形的改变，图 2-1b 中虚线表示的就是该体系可能发生的位形改变。

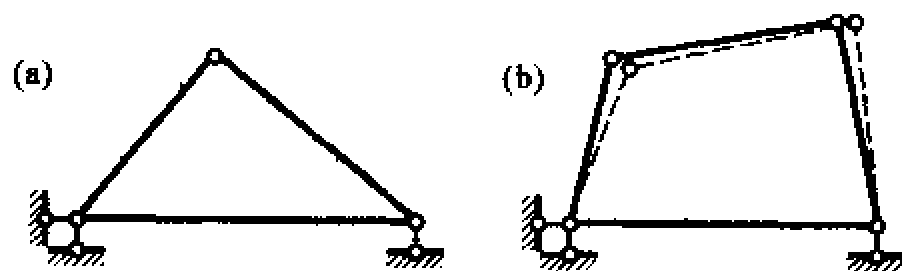


图 2-1

一般结构都应该是几何不变体系，而不能采用几何可变体系。几何构造分析首先是为了检查并设法保证结构的几何不变性。此外，它对于指导结构的受力分析来说也常常是很有必要的。

§2-2 平面体系几何不变的必要条件

判别一个体系是否为几何可变，实际上就是判别该体系是否存在刚体运动的自由度。本章中将这种刚体运动的自由度简称为体系的自由度。所谓体系的自由度，是指完全确定体系位置所需要的独立坐标的数目。这里所说的独立坐标是指广义坐标。它可以是直角坐标，也可以是其他任何可独立变化的几何参数。

在理论力学中已经知道，一个动点在空间有 3 个自由度，即要确定空间一动点的位置需要 3 个独立坐标；一个刚体在空间有 6 个自由度，即要确定空间一刚体的位置需要 6 个独立坐标。在

平面内,一个动点有 2 个自由度,例如图 2-2a 中用 x 和 y 两个独立坐标就可以完全确定平面内一动点 A 的位置。图 2-2b 示一几何形状不变的平面体,简称为刚片。先用 x、y 两个独立坐标可以确定该刚片上一点的位置,然后用独立坐标 φ 确定刚片上任意直线 AB 的倾角,这样就完全确定了刚片在平面内的位置。所以,一个刚片在平面内有 3 个自由度。

平面体系并非自由系,各部分之间以及杆件与基础之间总存在一定的联系。这种联系对体系各部分之间的位置关系形成几何学上的限制。这种对非自由系各部分的位置关系所施加的几何学上的限制称为几何约束,以下简称为约束。

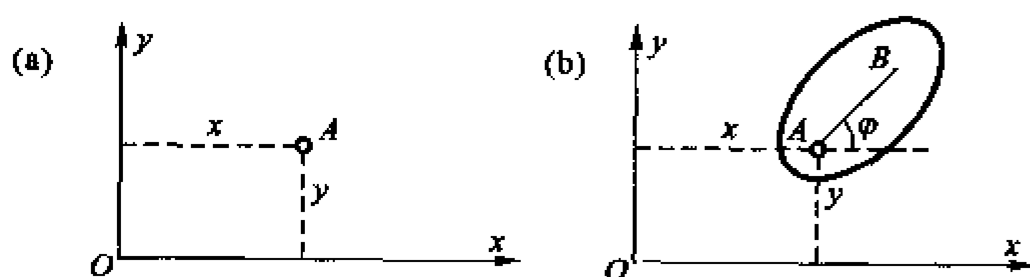


图 2-2

体系杆件之间以及杆件与基础之间的联结方式常见的有链杆联结、铰联结和刚性联结等。图 2-3a 所示 A、B 两点间由一链杆联系,原先 A、B 两个独立动点有 4 个自由度,通过链杆联结后成为 AB 杆在平面内只有图示 3 个自由度;图 2-3b 所示刚片Ⅰ、Ⅱ间由一链杆 BC 联结,原先两个独立刚片有 6 个自由度,通过链杆联结后可以由图示 5 个独立坐标 x、y、φ、α、β 确定其位置,自由度减为 5 个。由此可知,一根链杆相当于 1 个约束,可以减少 1 个自由度。

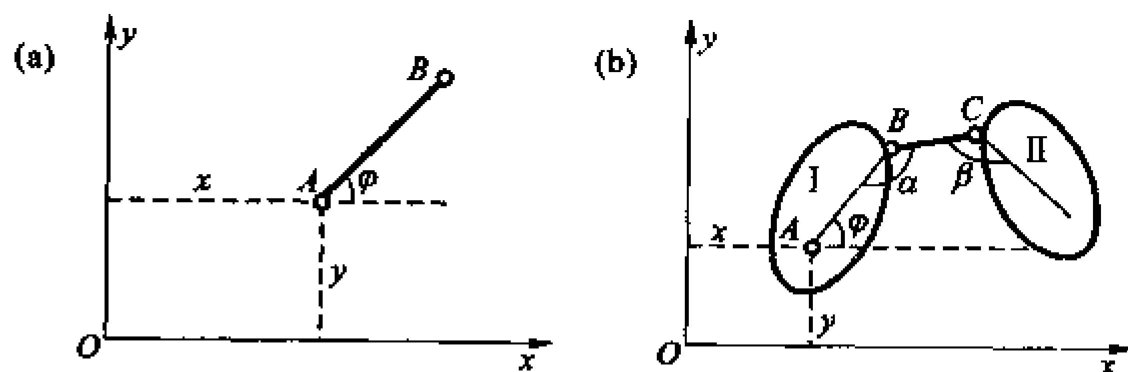


图 2-3

以下来看刚片之间用铰联结的情况。图 2-4a 所示两个刚片在 B 点用铰联结,联结之前两个刚片共有 6 个独立自由度,联结之后的自由度减为图示的 4 个。由此可知,一个铰相当于 2 个约束,可以减少 2 个自由度。图 2-4b 所示为三个刚片之间用一个铰联结的情况,联结之后的自由度数为 5,共计减少了 4 个自由度。一般称联结两个刚片的铰为单铰,联结两个以上刚片的铰为复铰。图 2-4b 所示复铰的约束作用相当于两个单铰。由此类推,从减少自由度的观点来看,联结 n 个刚片的复铰可以当作 $n-1$ 个单铰,将减少 $2(n-1)$个自由度。

图 2-5a 所示为平面内两个刚片Ⅰ、Ⅱ在 A 点刚性联结成一个整体。由于刚性联结使刚片Ⅰ、Ⅱ合成为一个刚片,因此一个刚结点相当于 3 个约束,可以减少 3 个自由度。由此类推,联结

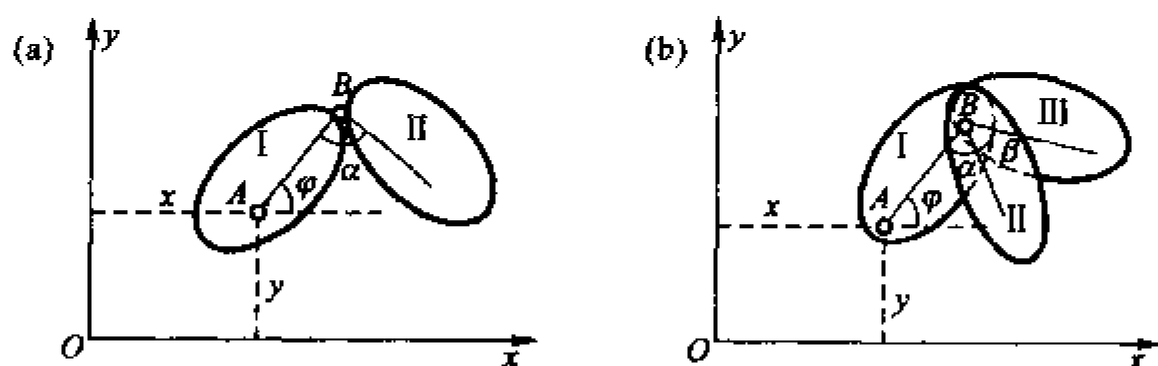
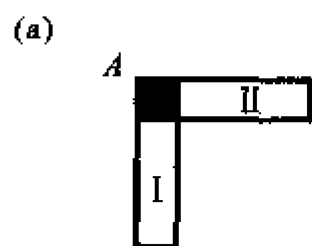


图 2-4

n 个刚片的复刚结点可以当作 $n-1$ 个上述的单刚结点,可以减少 $3(n-1)$个自由度,如图 2-5b 所示。



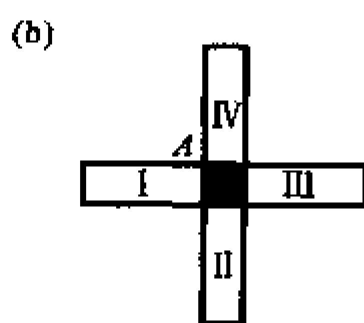


图 2-5

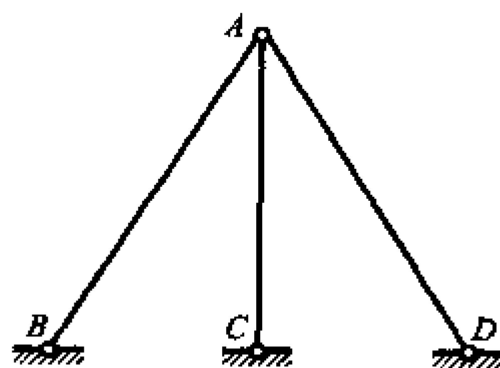


图 2-6

应当注意的是,并非所有的约束都能减少体系的自由度。或者说,体系中约束的作用可能相互重复。例如,图 2-6 中,平面内一动点 A 原有两个自由度。若用两根不共线的链杆将其与基础相联,则 A 点被完全固定,体系的运动自由度为零。此时,若再增加一根链杆,体系的实际自由度仍为零,这说明所增加链杆约束的作用与体系中已有约束的作用是重复的。一般把使体系成为几何不变而必须的约束,称为必要约束;把必要约束之外的约束称为多余约束。每一个必要约束都使体系减少一个自由度;而多余约束的存在并不减少体系的自由度。值得一提的是,必要约束与多余约束经常是相对而言的。图 2-6 所示体系中 AB、AC 和 AD 三根链杆中的任意两根均可认为是必要约束,剩余的一根则为多余约束。

体系的自由度数就等于其各组成部分互不联结时总的自由度数减去体系中的必要约束数。当上述差值为零时则构成几何不变体系。这就是说,体系各组成部分总自由度数与必要约束数之差为零,是体系几何不变的充分条件。但对于许多复杂体系来说,必要约束并非都易直观判定,因此就需要引入有关计算自由度的概念。体系的计算自由度定义为:体系各组成部分总的自由度数减去体系中总的约束数,可记为 W。体系的计算自由度 W 十分容易算得,它可能大于零也可能等于或小于零。当所有约束全部是必要约束时,体系的自由度就等于体系的计算自由度,当体系中的约束包含有多余约束时,体系的自由度就大于体系的计算自由度。由此可见,几何不变的必要条件是:体系的计算自由度 $W \leqslant 0$。若 $W>0$,则体系一定是几何可变的。所以,确定计算自由度 W 的数目就成为体系几何可变性判定的手段之一。

例 2-1 试求图 2-7a 所示平面体系的计算自由度。

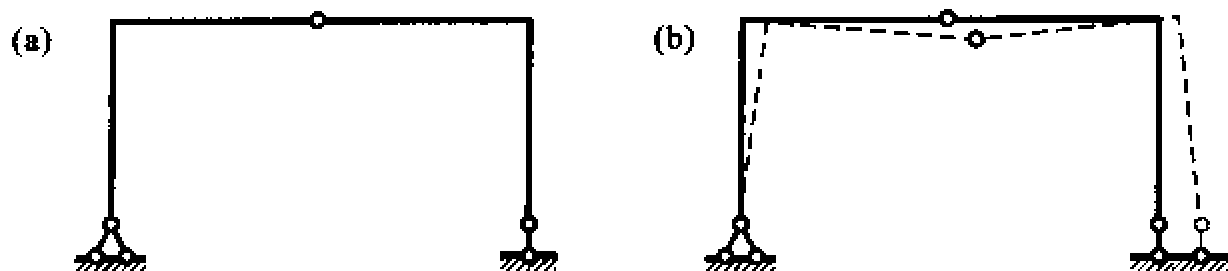


图 2-7

解 该体系刚片数 = 2，单铰数 = 1，支座链杆数 = 3，因而有

$$W=2\times3-1\times2-3=1$$

说明该体系不满足几何不变的必要条件，则体系是几何可变的。图 2-7b 所示为体系可能发生的刚体位移形态。

例 2-2 试求图 2-8a 所示平面体系的计算自由度，并分析体系的几何可变性。

解 方法一：将图 2-8a 视为铰结刚片体系。图示体系刚片数 = 14，折算单铰数 = 20，支座链杆数 = 3，于是，有

$$W=14\times3-20\times2-3=-1$$

说明该体系满足几何不变的必要条件。

方法二：将图 2-8a 视为由链杆联结的结点体系。此时体系的结点数 = 8，非支座链杆数 = 14，支座链杆数 = 3，于是，有

$$W=8\times2-14-3=-1$$

与采用方法一结果相同。

但是，计算自由度 $W\leqslant0$ 只是满足了几何不变的必要条件。图 2-8a 所示体系由于第一、三两个结间分别存在多余约束，而第二结间缺少必要约束，其实际自由度为 1，体系可以发生如图 2-8b 所示的刚体位移。因此，该体系是几何可变的。

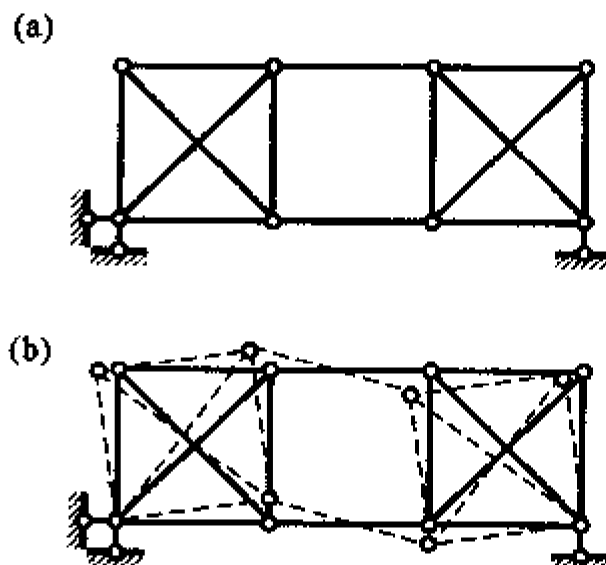


图 2-8

§2-3 平面几何不变体系的基本组成规则

为了构造几何不变体系，更需要研究组成几何不变体系的充分条件。本节就来讨论平面几何不变体系最基本的两刚片和三刚片组成规则。这些组成规则中所要求的约束数，是指保证体系几何不变的最少约束数。

2-3-1 两刚片组成规则

两个刚片间用不相交于一点也不相平行的三根链杆相联，其内部是几何不变的，并且没有多余约束。

图 2-9a 所示刚片Ⅰ、Ⅱ由 1、2 和 3 三根链杆相联。若链杆 3 不存在，由理论力学的运动学原理可知，链杆 1 和 2 延长线的交点 O 就是刚片Ⅰ、Ⅱ之间发生相对运动时的瞬时中心。这样，体系内部实际上形成一个几何可变的四杆铰结机构。当有链杆 3 存在时，只要它不通过链杆 1

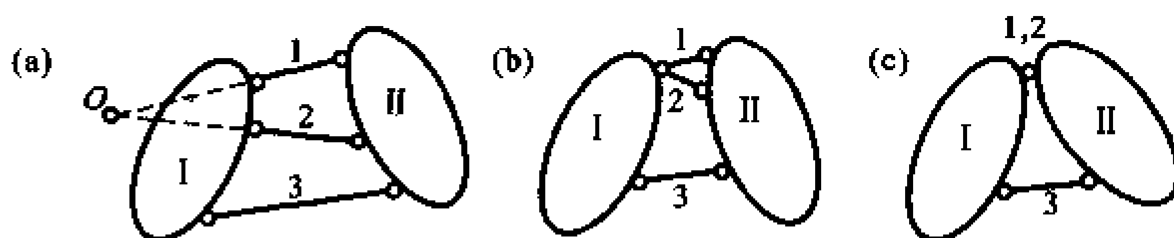


图 2-9

与2形成的运动瞬时中心 O 点，则刚片Ⅰ、Ⅱ之间就不可能再发生相对运动，即成为内部几何不变体系。图2-9b、c所示体系与图2-9a体系的实质是相同的，均为没有多余约束的内部几何不变体系。图2-9c中联结刚片Ⅰ、Ⅱ的实铰相当于两个约束，可以理解为是由图2-9b中链杆1和2构成的，而图2-9a中链杆1和2的作用是使刚片Ⅰ、Ⅱ之间只能发生绕瞬时中心 O 作相对转动，因此在进行体系的几何构造分析时，其作用与实铰是等效的，即相当于刚片Ⅰ、Ⅱ在 O 点由铰联结。这种由链杆延长线交点形成的铰联结一般称为虚铰。

根据上述分析，两刚片组成规则又可表述为：两个刚片间用一个铰(实铰或虚铰)和一根不通过该铰的链杆相联，其内部是几何不变的，并且没有多余约束。

如果联结两个刚片的三根链杆交于同一点，则所构成的体系是几何可变的。图2-10a所示体系中联结刚片Ⅰ、Ⅱ的三根链杆汇交于实铰 O，此时刚片Ⅰ可以绕 O 点任意转动。一般将这种位形可以发生有限量变化的几何可变体系称为常变体系。图2-10b所示体系中三根链杆延长线的交点 O 形成了刚片Ⅰ、Ⅱ之间发生相对运动时的瞬时中心。但当刚片Ⅰ绕 O 点发生瞬时微量转动后，三根链杆便不再交于一点，体系的位形不能继续变化。一般将这种位形仅可发生瞬时微量变化的几何可变体系称为瞬变体系。这里，微量变化是指体系的位移值相对于体系本身的几何尺寸来说属无限小量；而有限量变化是指体系的位移值与体系本身的几何尺寸两者在数学上属同一量级。

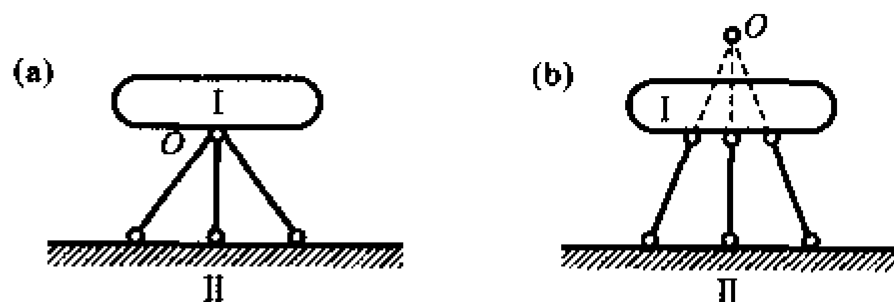


图 2-10

如果联结两个刚片的三根链杆相互平行，则所构成的体系也是几何可变的。图2-11a所示体系中联结刚片Ⅰ、Ⅱ的三根链杆长度相等，刚片Ⅰ可以发生有限量移动，因此是常变体系；图2-11b中三根链杆的长度不相同，当刚片Ⅰ发生微量移动后，三根链杆便不再互相平行，体系的位形就不能继续变化。因此，图2-11b所示是瞬变体系。

2-3-2 三刚片组成规则

三个刚片用不在一直线上的三个铰两两相联，其内部是几何不变的，并且没有多余约束。

只要将图2-9中的链杆3看作刚片，就可以由两刚片组成规则得到三刚片组成规则。联结

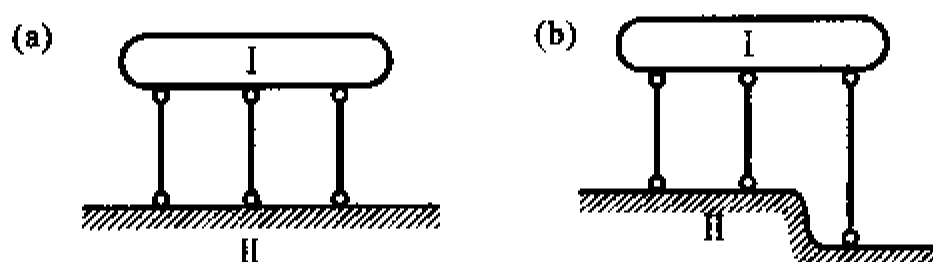


图 2-11

三个刚片的铰可以是实铰(图 2-12a),也可以部分或全部是虚铰(图 2-12b)。

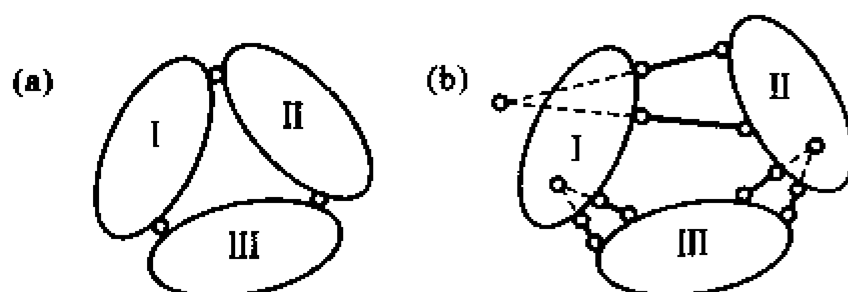


图 2-12

如果联结三个刚片的三个铰位于一直线上,如图 2-13 所示,则所构成的体系是几何瞬变的。因为铰 A 位于分别以 B 和 C 为圆心,BA 和 CA 为半径所作圆弧的切点上,A 点在上述两个圆弧公切线方向上存在运动自由度。但当 A 点沿公切线方向发生微量位移后,A、B 和 C 三个铰就不再位于一条直线上,体系的位形不能继续变化,故此为瞬变体系。

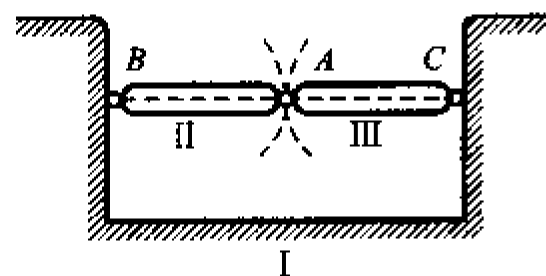


图 2-13

由图 2-13 根据微积分原理不难看出,瞬变体系的位形发生微量变化时,其构件长度的改变属高一级的微量,或者说其构件长度的改变与微量位移之间的比值为零。这样,就可以认为在体系发生位形微量变化时构件并无应变发生。

实际上,两刚片和三刚片组成规则都是基于同一简单的事实,即边长给定的三角形的几何形状是惟一确定的。从这个意义上说,平面几何不变体系的基本组成规则可统称为三角形规则。

以下来讨论三刚片联结的特殊情况。如果两个刚片之间是通过平行链杆联结,则其形成的虚铰将在无穷远处。图 2-14a、b 和 c 分别表示三个刚片之间的联系中包括一对、两对和三对平行链杆的情况。若将图 2-14a 中的刚片Ⅲ看作链杆,体系就转化为两个刚片由三根链杆联结的

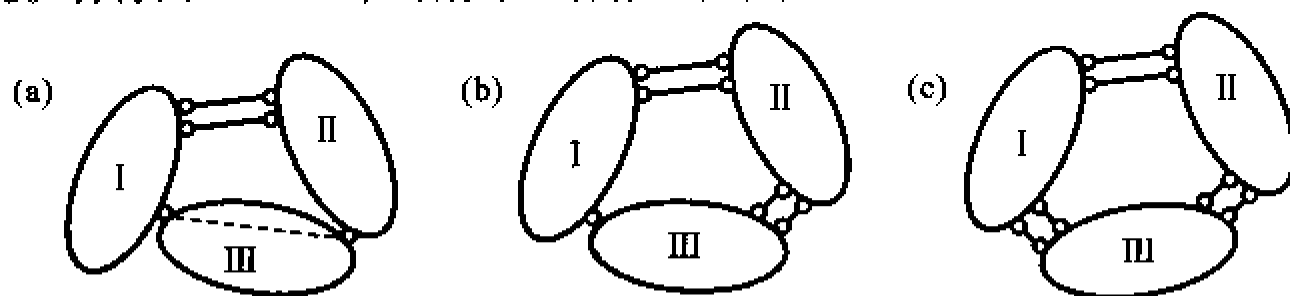


图 2-14

情况，根据两刚片组成规则可以推得：三个刚片用两个铰和一对平行链杆两两相联，若两铰的连线不与平行链杆同方向，其内部是几何不变的，并且没有多余约束，否则就是几何可变的。

对于图2-14b所示体系，两组平行链杆所形成的虚铰均在无穷远处。根据几何学原理，当两组平行线方向不同时，它们形成的两个交点在不同的无穷远点；当两组平行线方向相同时，它们形成的交点在同一无穷远点。于是可以推得：三个刚片用一个铰和两对平行链杆两两相联，若两对平行链杆方向不同，其内部是几何不变的，并且没有多余约束，否则就是几何可变的。

图2-14c中三个刚片由三对平行链杆两两相联，三组平行链杆所形成的三个虚铰均在无穷远处。根据射影几何学原理，平面上各无穷远点都在同一直线上，这就是说上述三个虚铰位于一条直线上。于是可以推得：三个刚片用三对平行链杆两两相联，其内部是几何可变的。

上述三刚片联结的三种特殊情况中，当体系内部为几何可变时，仍然可以根据位形变化是微量还是有限量的原则来判定体系是属于瞬变还是常变。

2-3-3 基本组成规则的应用技巧

在进行体系的几何构造分析时，可以根据需要在不改变体系几何构造特征的前提下减少或增加部件，从而使问题得以简化。

一元体：一个刚片与一个体系之间只用三根不相交于一点也不相平行的链杆联结，则该刚片称为一元体，在作体系的几何构造分析时，减少或增加一元体不改变体系的几何构造特征。例如，在分析图2-15所示桁架体系的几何构造时，可以将地基一元体去除而只分析桁架本身的几何构造。若桁架本身是内部几何不变的，则它与基础之间通过图示三根支杆联系后必定形成几何不变体系。应用一元体技巧时应该注意，若上述刚片与体系间联系的链杆数目不是3根，则相应的结论和做法就不能成立。

二元体：两个刚片与一个体系间只用三个不在一直线上的铰两两相联，则两个刚片称为二元体，在作体系的几何构造分析时，减少或增加二元体不改变体系的几何构造特征。例如，图2-15桁架在去除了一元体之后，可进一步由左向右逐对去除二元体，最后剩下右端阴影部所表示的铰结三角形为没有多余约束的几何不变体系，由此可推知原体系是几何不变，并且没有多余约束。反过来也可以从右端三角形逐对增加二元体形成桁架，最后再增加地基一元体，可得到同样的结论。

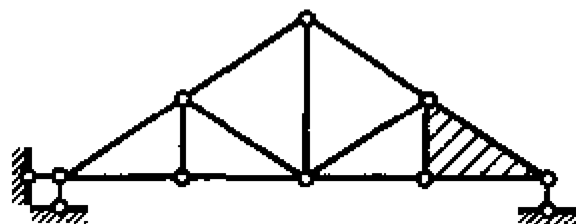


图 2-15

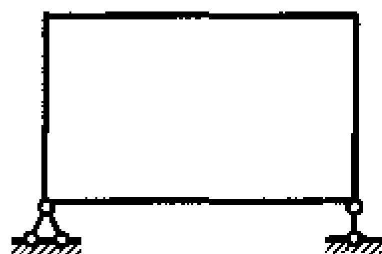


图 2-16

链杆与刚片之间的代换也是体系几何构造分析时的常用技巧。链杆是刚片的一种特殊形式，根据分析的需要，任何链杆都可以看作刚片，甚至包括支座链杆在内。但是，将刚片看作链杆却是有条件的。如果一个刚片仅通过两个铰(包括虚铰)对外联系，在分析需要时该刚片可以看作通过这两个铰的链杆，因为此时它在体系中发挥的作用与链杆相同，即仅使上述两个铰之间的

距离保持不变；如果一个刚片是通过3个或3个以上的铰对外联系，根据上述的等效原则，可以将该刚片看作联结这些铰的内部几何不变，并且无多余约束的链杆体系（见例2-7）。

此外，需要注意的是，若一个刚片内部具有多余约束，在对体系的几何可变性进行分析时可以看作一般刚片，但在求体系的计算自由度或是多余约束数量时应计入上述多余约束。例如，图2-16所示封闭刚结框架体系是具有3个内部多余约束的几何不变体系。

§2-4　平面体系几何构造分析举例

利用上一节所述的两刚片和三刚片组成规则、应用技巧以及平面体系几何不变的必要条件，能够解决一般工程上常见的平面杆件体系的几何构造分析问题。具体分析时可将易直观判定为内部几何不变的部分当作刚片，并应注意检查刚片之间的联系数目是否符合两刚片或三刚片的组成规则。

例2-3　试分析图2-17a所示体系的几何构造。

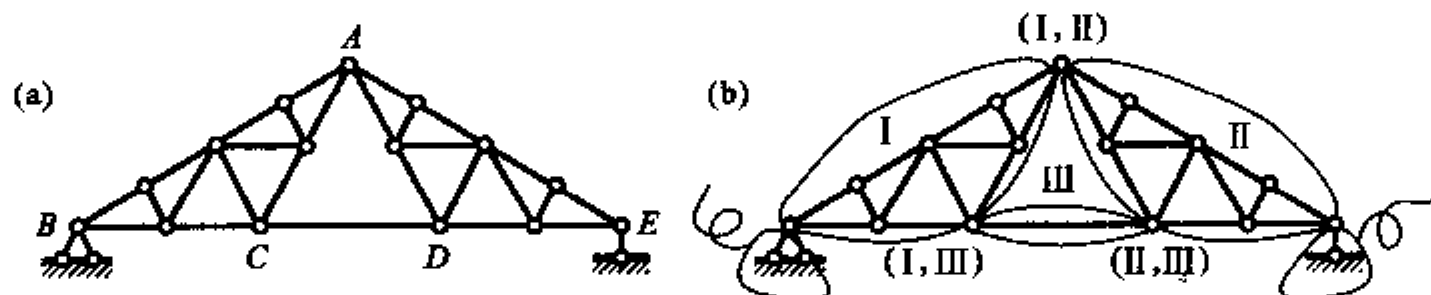


图　2-17

解　去除作为一元片的基础并划分三刚片如图2-17b，刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ由不在一直线上的三个铰（Ⅰ，Ⅱ）、（Ⅱ，Ⅲ）、（Ⅰ，Ⅲ）两两相联，符合几何不变的组成规则。所以，体系几何不变，并且无多余约束。

例2-4　试分析图2-18a所示体系的几何构造。

解　扩大基础至铰D如图2-18b所示，刚片Ⅰ、Ⅱ由不相交于一点也不平行的三根链杆相联，符合几何不变的组成规则。所以，体系几何不变，并且无多余约束。

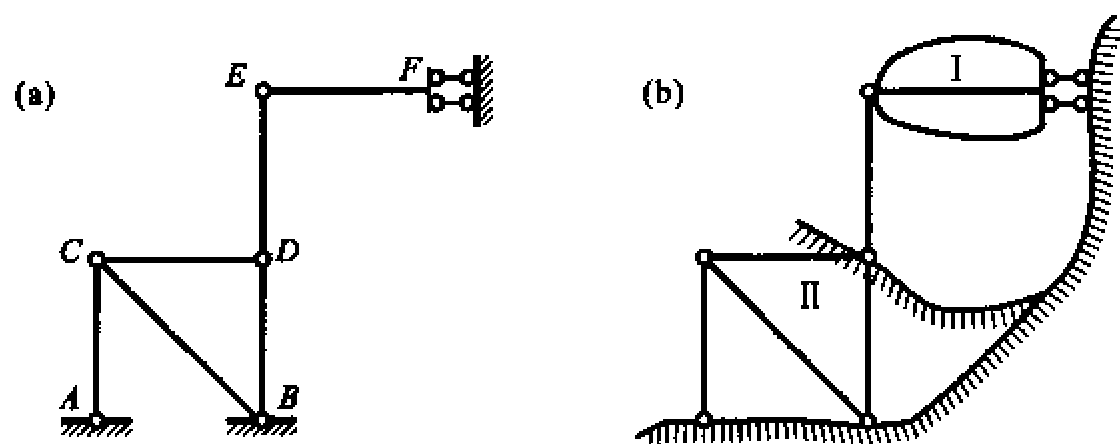


图　2-18

例2-5　试分析图2-19a所示体系的几何构造。

解　先去除一元体FC（或视为由FC和C处支杆所构成的二元体），再将刚片GHJ和基础刚片均用链杆代替，如图2-19b所示。刚片Ⅰ、Ⅱ由相互平行但不等长的三根链杆相联，所以体系是瞬变的。

本例也可按图2-19c按三刚片联结的特殊情况进行分析。图中刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ由铰（Ⅰ，Ⅲ）、（Ⅱ，Ⅲ）和一

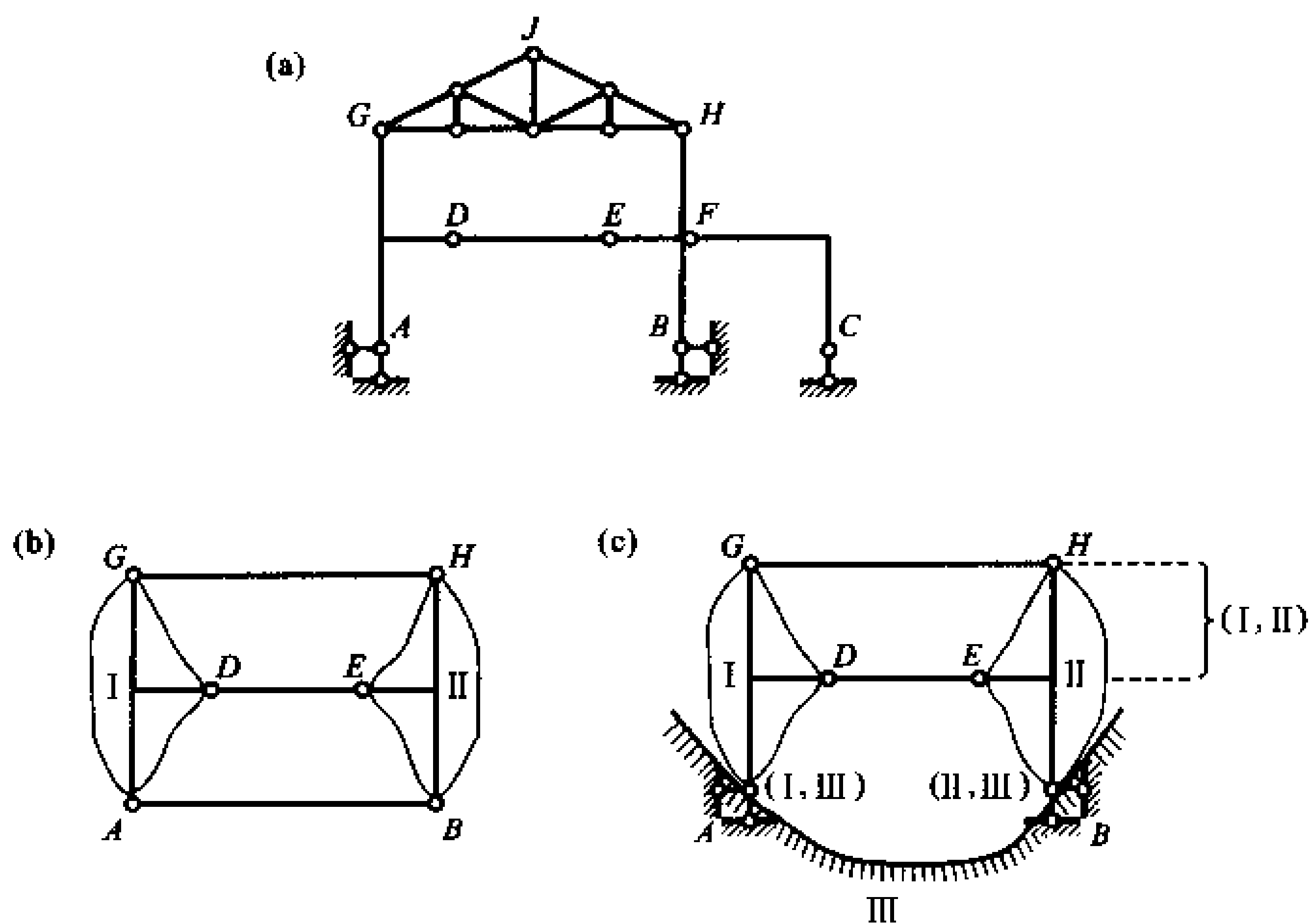


图　2-19

组平行链杆两两相联，因平行链杆与上述两铰的连线平行，所以体系是瞬变的。

例2-6　试分析图2-20a所示体系的几何构造。

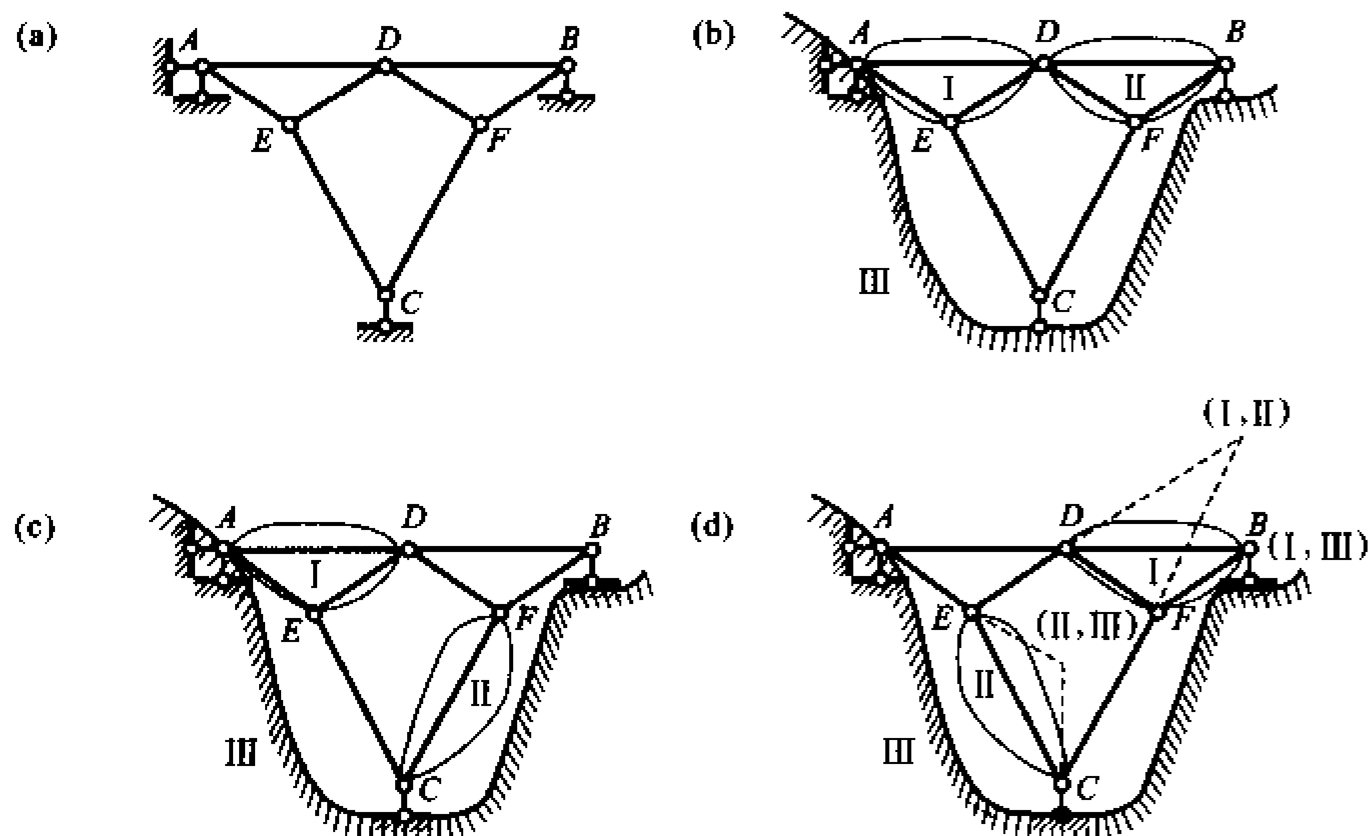


图　2-20

解　本例若按图2-20b或c所示的刚片划分，则刚片Ⅱ与基础刚片Ⅲ之间均只有一根支座链杆直接联系，另一个为间接联系，不能直接套用三刚片规则。若采用图2-20d所示的刚片划分，此时刚片Ⅰ、Ⅱ之间通过链

杆 ED 和 CF 相联，其延长后形成虚铰(Ⅰ，Ⅱ)；刚片Ⅰ、Ⅲ之间通过 AD 杆和 B 支座链杆相联，形成虚铰(Ⅰ，Ⅲ)；刚片Ⅱ、Ⅲ之间通过 AE 杆和 C 支座链杆相联，形成虚铰(Ⅱ，Ⅲ)。可见，刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ是由不在一直线上的3个铰(Ⅰ，Ⅱ)、(Ⅰ，Ⅲ)和(Ⅱ，Ⅲ)两两相联，所以体系是几何不变的，并且无多余约束。

例2-7 试分析图2-21a所示体系的几何构造。

解 该体系组成较为复杂，刚片取得不当就无法纳入两刚片或三刚片规则。

首先考察中间部分，由两个弧形刚片和一根链杆构成内部几何不变体。该几何不变部分通过3个铰对外联系，因而可以用一个铰接三角形体系等效替代；再将基础用链杆等效替代，如图2-21b所示。

在以上体系等效变换的基础上画出刚片(图2-21b)，刚片Ⅰ、Ⅲ和Ⅱ、Ⅲ分别通过虚铰(Ⅰ、Ⅲ)和(Ⅱ，Ⅲ)联结，刚片Ⅰ、Ⅱ通过一对平行链杆联结。因为两虚铰的连线平行于上述平行链杆，所以体系是瞬变的。

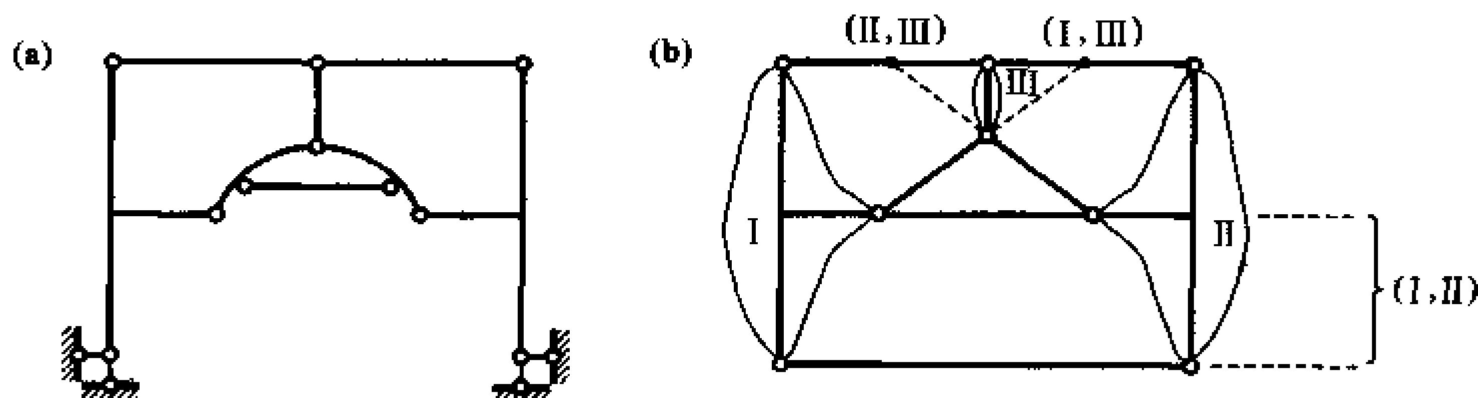


图 2-21

由以上的例题分析可见：对于不动铰支座和直接联结于基础上的几何不变部分，均可划入基础刚片的范围，而对于单链杆支座就不能划入基础刚片；在确定刚片时，应考虑到两两之间应有足够的直接联系；在分析过程中，链杆与刚片之间常可按解题需要相互替换，对于有些体系，可以从不同的角度或采用不同的刚片分析其几何构造，所得的结论是相同的。

最后值得一提的是，两刚片和三刚片组成规则是几何不变体系最基本也是最常用的组成规则，但有一些体系的几何构造比较复杂，不能按上述规则进行分析。有关这类体系的几何构造分析可采用§3-7中的零载法，或是将问题转化为一组齐次线性代数方程，然后根据方程组解的性质得出有关体系几何构造方面的结论。有关空间几何不变体系的构造要求可见§3-6。

§2-5 体系的几何构造与静定性

所谓体系的静定性，是指体系在任意荷载作用下的全部反力和内力是否可以根据静力平衡条件确定。体系的静定性与几何构造之间有着必然的联系，以下就此分别进行讨论。

图2-22a、b、c所示体系分别为几何不变无多余约束、几何不变有多余约束和几何常变的。由理论力学可知，在任意荷载 F_P 作用下，处于平衡状态的任一平面体在其平面内可建立三个独立的静力平衡方程，这三个方程可一般地表达为 $\sum F_x=0$，$\sum F_y=0$ 和 $\sum M=0$。

图2-22a所示体系是几何不变的，而且三根支杆均为必要约束，其约束反力可以由上述三个静力平衡方程联立求解确定。于是，体系的内力也就可以确定。所以，无多余约束的几何不变体系是静定的，可称为静定结构。

图2-22b所示体系是几何不变的，但四根支杆中有一根(任意一根)为多余约束。由于约束

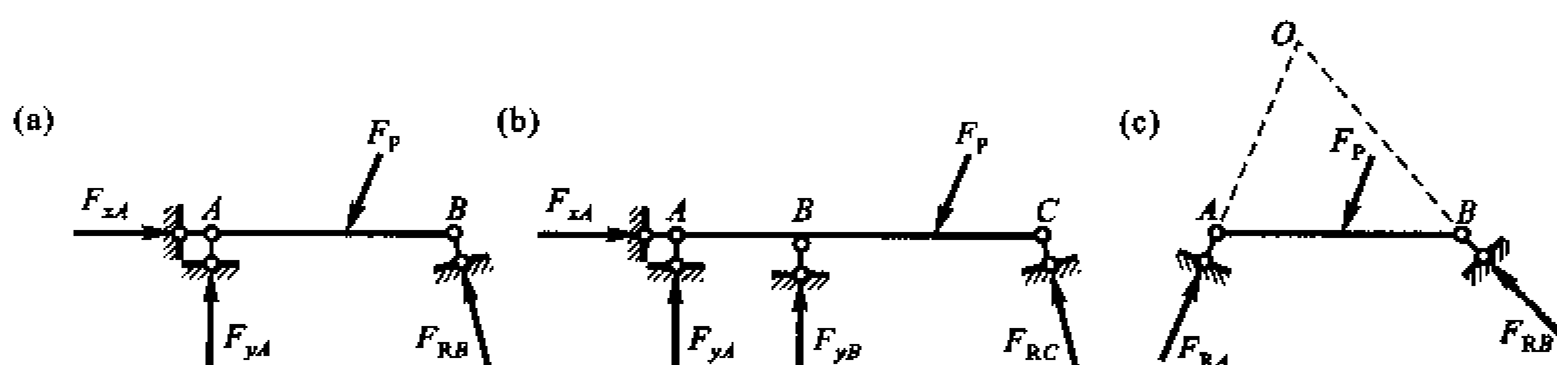


图　2-22

反力的个数多于静力平衡方程的个数，因而不能求得确定的解。实际上，只要任意设定某一支杆的约束反力后，就可以根据三个静力平衡方程求得其余三根支杆的约束反力。这说明该体系满足平衡条件的反力和内力有无穷多组，或者说是不确定的。所以，有多余约束的几何不变体系是静不定的，可称为静不定结构或超静定结构。以后将介绍，超静定结构的反力和内力必须结合体系的变形条件才能确定。

图2-22c所示体系只有两根支杆，因为缺少一个必要约束所以是几何常变的。这样，未知约束反力的个数就少于静力平衡方程的个数。除特殊情况外，要求两个未知约束反力同时满足三个静力平衡方程一般来说是不可能的。如图中荷载 F_P 未通过两支杆延长线的交点 O，体系就不可能达到平衡。可见，几何常变体系一般无静力学解答，也不可能在任意荷载作用下达到平衡，所以不能用作结构。

现再来分析图2-23a所示的瞬变体系。由于荷载有竖向分力，体系在其原始的水平位置上不可能达到平衡。或者说，此时体系中杆件的轴力将趋向于无穷大。实际的杆件是可以变形的，这样体系可发生如图2-23b所示的有限位形变化。但此时体系中杆件的轴力非常大，可能导致杆件的破坏。所以，瞬变体系也不能用作结构，而且结构设计中应避免采用接近瞬变的几何构造，以防止个别杆件的内力过大。

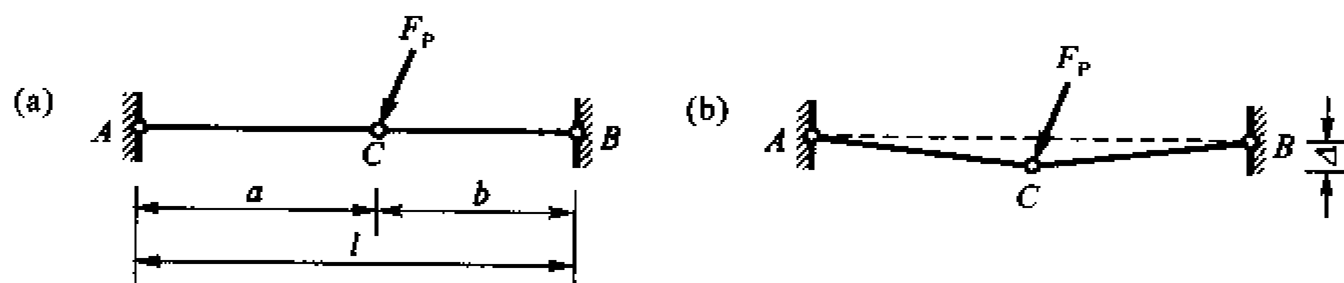
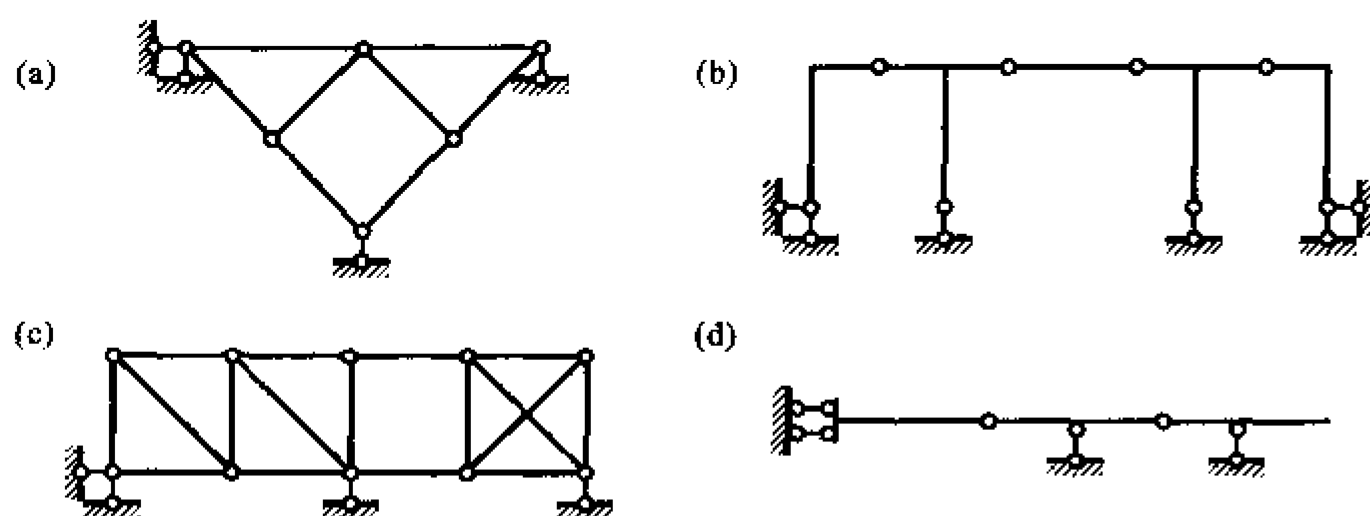


图　2-23

习　题

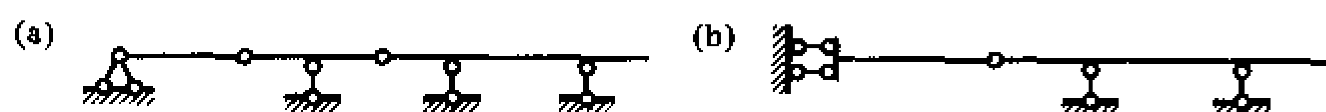
2-1　试说明体系的必要约束与多余约束、自由度与计算自由度之间的区别，并说明在体系的几何构造分析中为何引入计算自由度的概念。

2-2　试求图示体系的计算自由度，并分析体系的几何构造。



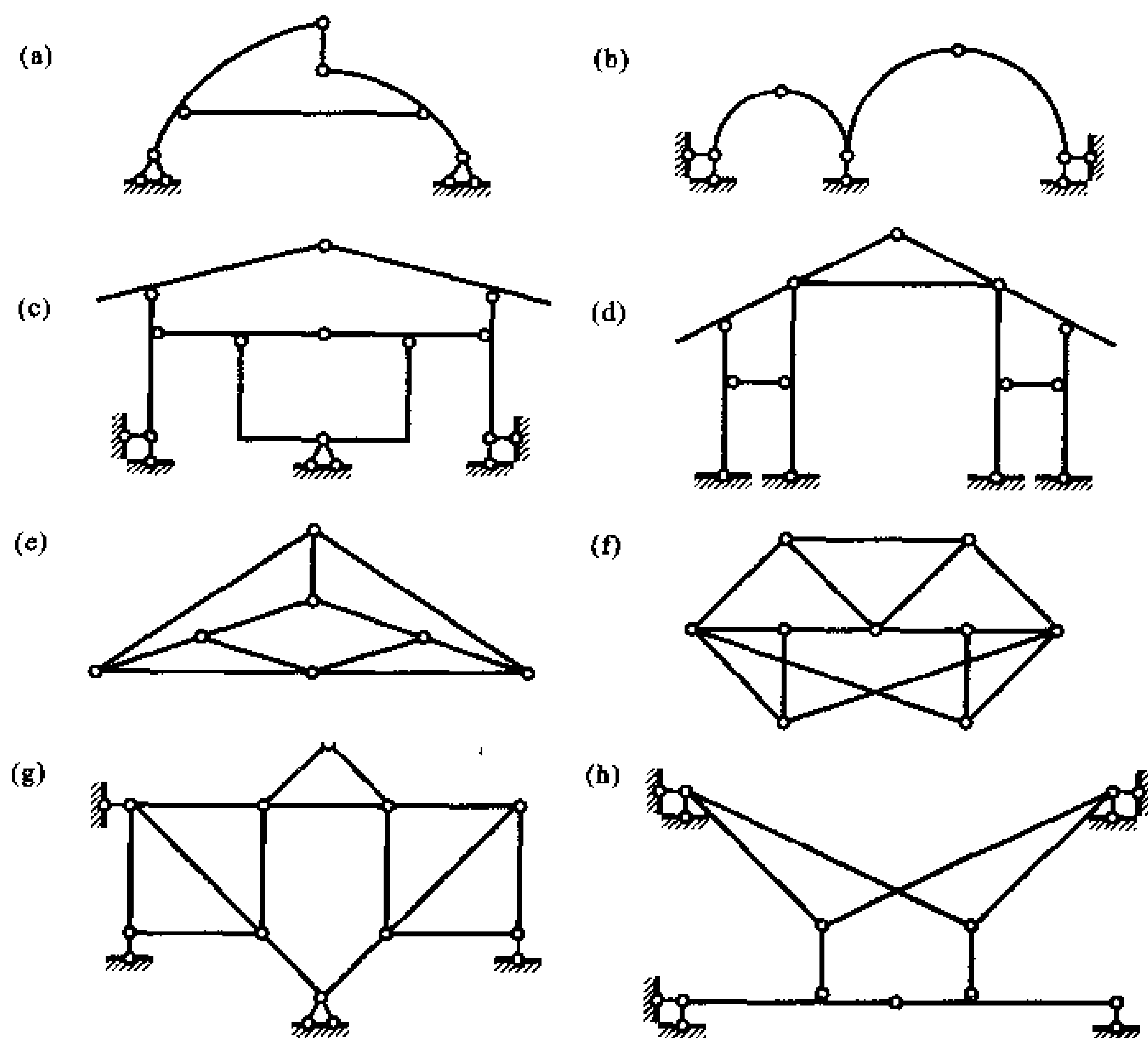
题 2－2 图

2－3　试分析图示体系的几何构造。



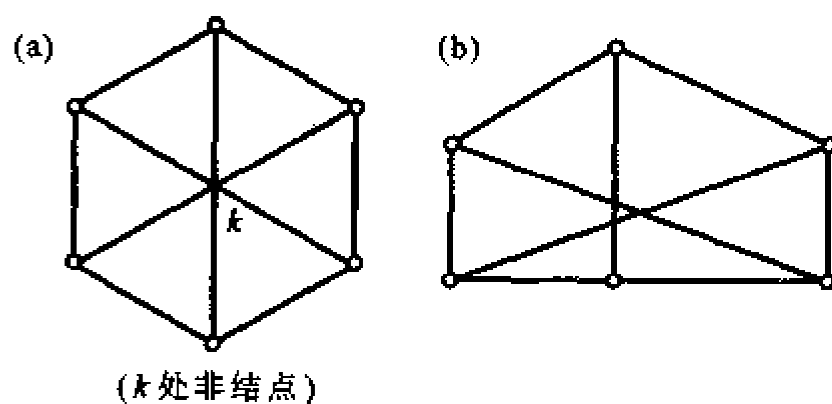
题 2－3 图

2－4　试分析图示体系的几何构造。



题 2－4 图

2－5　试从两种不同的角度分析图示体系的几何构造。

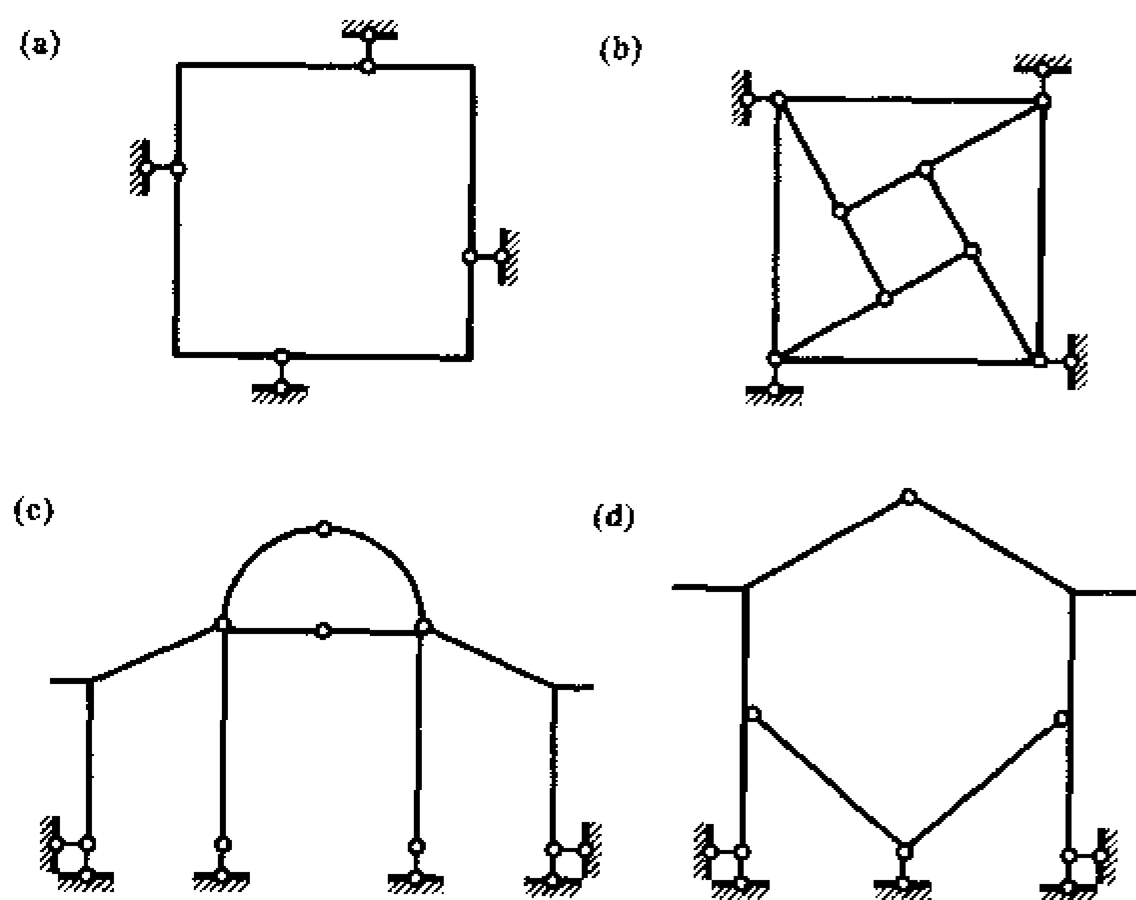


题2－5图

2－6　试说明何为体系的静定性，以及体系的静定性与几何构造之间的关系。

2－7　试说明瞬变体系的受力特点。为什么几何构造接近于瞬变的几何不变体系一般不宜作为结构？

2－8　试分析图示体系的几何构造。



题2－8图

第3章 静定结构

§3-1 概　　述

静定结构的种类很多，包括静定梁、刚架、桁架、组合结构、拱和悬索等不同的类型。本章将结合工程中常见的结构形式，讨论静定结构的受力分析问题。

前已述及，从几何构造特征上讲，静定结构是没有多余约束的几何不变体系。由此也决定了静定结构的基本静力特性：在任意荷载作用下，静定结构的全部反力和内力都可以根据静力平衡条件求得，而且满足静力平衡条件的解答是惟一的。

所谓静力平衡条件，在平面直角坐标系中就是沿 x、y 轴方向力的平衡条件和在 Oxy 平面内的力矩平衡条件，表达为方程的形式为：$\sum F_x=0$，$\sum F_y=0$ 和 $\sum M=0$。对于空间结构，静力平衡条件就是沿三个坐标轴方向力的平衡条件和绕三个坐标轴的力矩平衡条件，表达为方程的形式为：$\sum F_x=0$，$\sum F_y=0$，$\sum F_z=0$，$\sum M_x=0$，$\sum M_y=0$ 和 $\sum M_z=0$。求解静定结构时，可以按解题需要对结构整体建立平衡方程，也可以对结构的任一局部甚至某一个结点建立平衡方程，称为隔离体平衡方程。若对静定结构的每一个构件和结点均列出上述平衡方程，然后联立求解，虽然一定可以得到解答，但计算工作往往十分繁琐；若是盲目地列出部分构件的平衡方程，又常常会发生未知量数目多于方程数目，或是因所列出的方程线性相关而不足以求解全部未知力的情况。因此，如何寻找问题求解的突破口，尽量使一个平衡方程中只含有一个未知力，或者使联立方程的数目尽可能地减少，就成为静定结构受力分析中的关键问题。

在静定结构受力分析中应充分注意结构以及荷载方面的基本特点，并充分地利用这种特性。结构的基本特点包括几何构造、构件和其联结的形式以及支座类别等方面，还包括是否为对称结构等；荷载的基本特点包括荷载的类型，作用位置和方向，是否具有对称或反对称性质，以及是否在几何不变部分上形成自平衡力系等。

一般地说，几何构造形式简单的静定结构比较容易求解。例如，图 3-1 所示的静定桁架，在求得支座反力后就可以按照几何构造分析中去除二元体的顺序逐个求得杆件的内力；也可以从刚片联结的角度来看其几何构成，采用恰当的截面由隔离体平衡条件求解杆件内力。图 3-2a 所示三铰刚架的几何构成符合三刚片组成规则，求解时可如图 3-2b 所示，解除其中的任一铰并代以相应的两个未知力，然后按 BC 部分和刚架整体分别对铰 C 和铰 A 取矩等于零的平衡条件，建立平衡方程并求得上述未知力，余下的问题就可以迎刃而解。

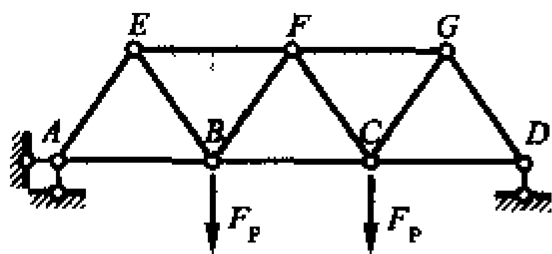


图 3-1

有些静定结构的几何构造可区分为基本部分和附属部分。所谓基本部分是指其自身已形成几何不变体系，或者可以独立承受预定荷载的部分；而附属部分是指需要依靠基本部分的支承才

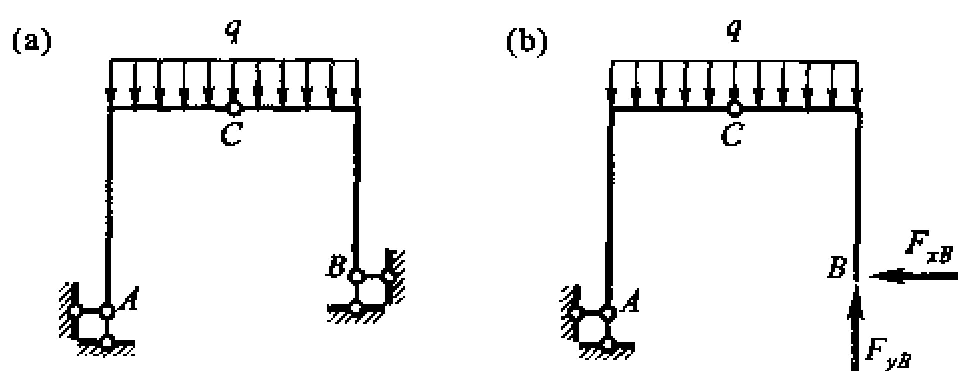


图 3-2

能维持其几何不变性的部分。例如，图3-3a所示的两跨静定梁，伸臂梁 AC 为基本部分，而梁 CD 则为附属部分，两者之间的关系可以用图3-3b所示的层叠图表达。从几何构造方面的特点不难分析，作用于静定结构基本部分上的荷载不会传至附属部分，它仅使基本部分产生内力；而作用于附属部分上的荷载将传至基本部分，使附属部分和基本部分均产生内力。由此可知，在进行此类静定结构的受力分析时，应该首先分析附属部分，然后再向基本部分推进。于是，可画出图3-3c所示的隔离体图，首先通过 CD 段的平衡条件求得两部分之间的相互作用力 F_{yC}，然后再进行 AC 段的受力分析。梁的弯矩图形状如图3-3d所示。

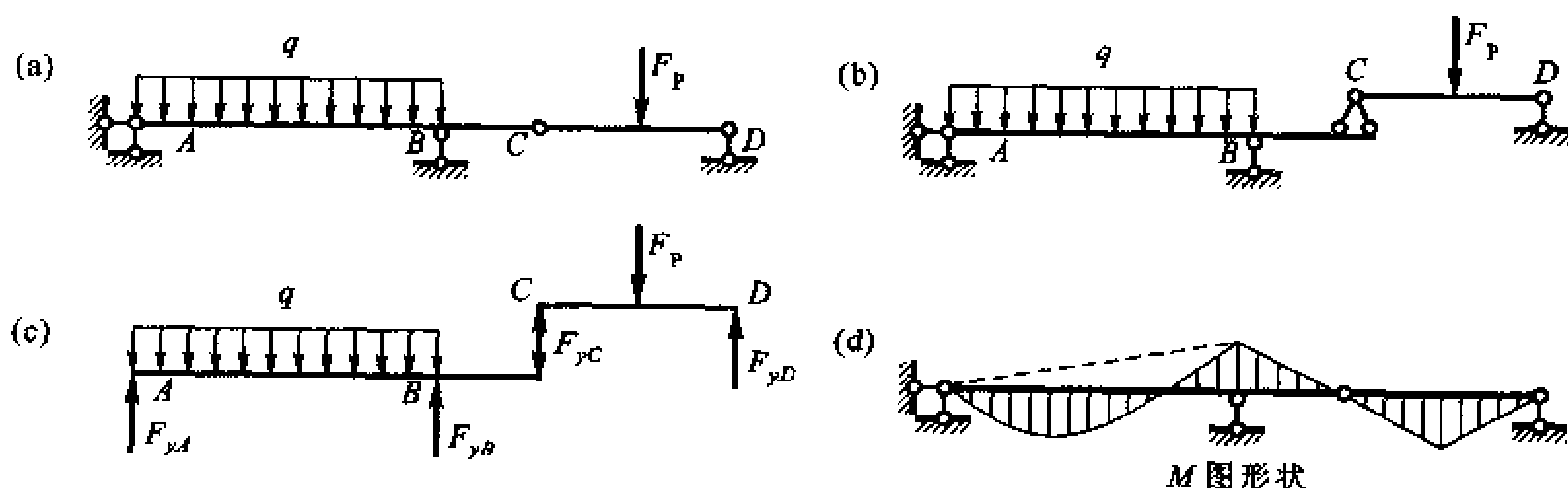


图 3-3

组成静定结构的构件主要有二力杆和受弯杆两种。二力杆也称为桁架式杆件，是指直杆通过端部的两个铰对外联系，杆件仅承受轴向力的作用；受弯杆也称为刚架式杆件，一般同时承受弯矩、剪力和轴力的作用。在求解静定结构时，应充分注意不同类型杆件的受力特点，还应注意杆件之间的联结方式以及结构支座的形式，利用其各自所对应的静力特征。例如，在分析图3-4a所示的静定结构时，为了尽可能地减少联立平衡方程的数目，应先寻找求解的突破口。该结构支座 A、B、C 的竖向反力并不能由整体平衡条件完全确定。若如图3-4b所示列出铰 F 的竖向力平衡方程并不能求得 AF 杆的轴力，这是因为 FG 杆是受弯杆件，有未知的杆端剪力 F_{QFG} 存在。但若如图3-4c以铰 A 为突破口，由于支座水平链杆中的反力明显地就等于 F_P，仅用铰 A 水平方向力的平衡方程就可以解出 AF 杆轴力 F_{NAF} 的水平分力，并进而可根据比例关系求出杆件轴力 F_{NAF}。余下的问题是可以迎刃而解的。例如，列出隔离体 $FGDC$ 对 D 点的力矩平衡方程，即可进一步解出 EF 杆的轴力等。图3-4d是该结构的几何构造分析图。从中可以看出，刚片Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ通过两个虚铰(Ⅰ,Ⅱ)、(Ⅰ,Ⅲ)和一对平行链杆(AE 杆及 B 支座链杆)两两联结，

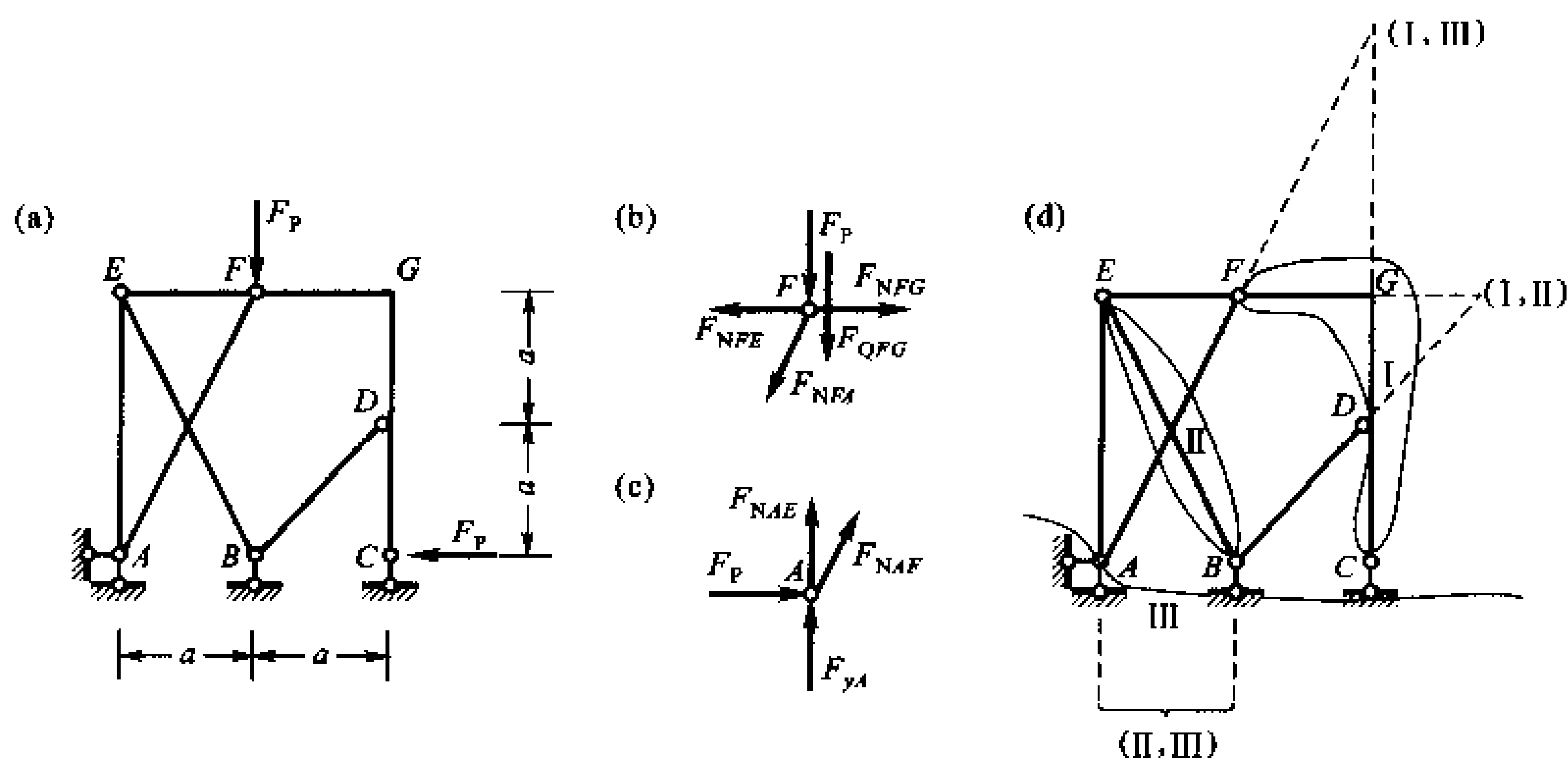


图 3-4

符合三刚片的组成规则。可见，图 3-4a 所示的结构与图 3-2a 所示的三铰刚架在几何构造上具有相同的实质，因此也就可以利用三刚片问题的通用分析方法进行求解。具体做法是：切断上述平行链杆，分别列出刚片Ⅱ对虚铰(Ⅰ,Ⅱ)和刚片Ⅰ、Ⅱ构成的联合体对虚铰(Ⅰ,Ⅲ)的力矩平衡方程，联立求解即可得到 AE 杆的轴力和 B 支座的竖向反力，结构其余杆件的内力便可以迎刃而解。

求解静定结构时，常可以根据结构构造、支座形式以及荷载方面的特点，判定其某一杆件的内力或是杆件的某项内力为零，从而简化结构的受力分析过程。例如，图 3-4a 所示结构，若无水平荷载作用，即可判定 A 支座水平链杆中的反力为零；并可进一步判定 AF 杆的内力为零；同时还能判定 CD 杆无弯矩和剪力存在等。若结构对称，分析时还应充分利用其在对称荷载或反对称荷载作用下，杆件内力的对称性或反对称性。例如，若图 3-1 所示为对称桁架，则可判定在图示对称荷载的作用下，FB 和 FC 杆的轴力为零，因为桁架杆件内力的对称性要求上述两杆中的轴力相等，若轴力不等于零则铰 F 在竖直方向上就无法平衡；若将作用于铰 C 的荷载反向，使荷载成为反对称的，则可判定桁架 BC 杆的轴向力为零，因为位于对称轴上杆件的轴向力属于对称内力，在反对称荷载作用下不会发生对称的内力。

静定结构的受力分析要求熟练地运用理论力学和材料力学的基本概念、基本理论与基本方法。例如，隔离体方法，杆件上的荷载与杆件内力之间的微分关系，以及用叠加法绘制杆件的弯矩图等。如在求解图 3-3a 所示的两跨静定梁时，也可以直接利用材料力学中的基本原理进行分析。首先作出附属部分简支梁 CD 的弯矩图；再根据 BC 段剪力无改变，弯矩图斜率不变的规律将上述弯矩图直线延伸至支座 B 处，如图 3-3d 所示；最后，再以图中虚线为基线叠加简支梁在均布荷载作用下的弯矩图形，便可得到原多跨静定梁的弯矩图。

以上介绍了静定结构的基本静力特性及其受力分析方面的总体概念。只有充分地掌握总体概念，才能有效地指导对具体问题的分析与求解；反过来，也只有通过解决各类具体问题的实践过程，才能形成对总体概念的深刻理解和运用能力。

§3-2　静定梁和静定平面刚架

静定梁和静定平面刚架在工程中有广泛的应用。在材料力学中已介绍了如图3-5所示由单个杆件构成的静定梁的内力分析方法。这些梁常称为单跨梁，其中图3-5a、b、c所示的单跨梁在工程中最为常见，分别称为简支梁、伸臂梁和悬臂梁；而图3-5d所示梁一端为滑动支座的情况通常是在利用对称性时发生的。

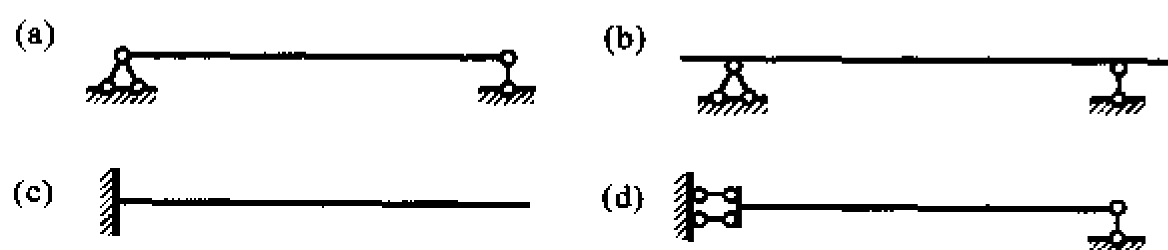


图　3-5

用上述单跨梁作为基本单元，可以构造出跨越几个相连跨度的静定梁，称为多跨静定梁。图3-6a所示为用于公路桥的混凝土多跨静定梁，各单跨梁之间的联接采用企口结合的形式，这种结点可以视为铰结点，其计算简图如图3-6b所示。房屋建筑中屋面结构的木檩条也常采用多跨静定梁这种结构形式，如图3-7a所示。在檩条接头处采用斜搭接并用螺栓系紧，这种结点也可视为铰结点，其计算简图如图3-7b所示。只要上述铰结点位置恰当，按照图3-6、图3-7所构造的多跨静定梁在均布荷载作用下，一般可使截面上弯矩的峰值小于相应的各跨简支梁或连续梁的弯矩。

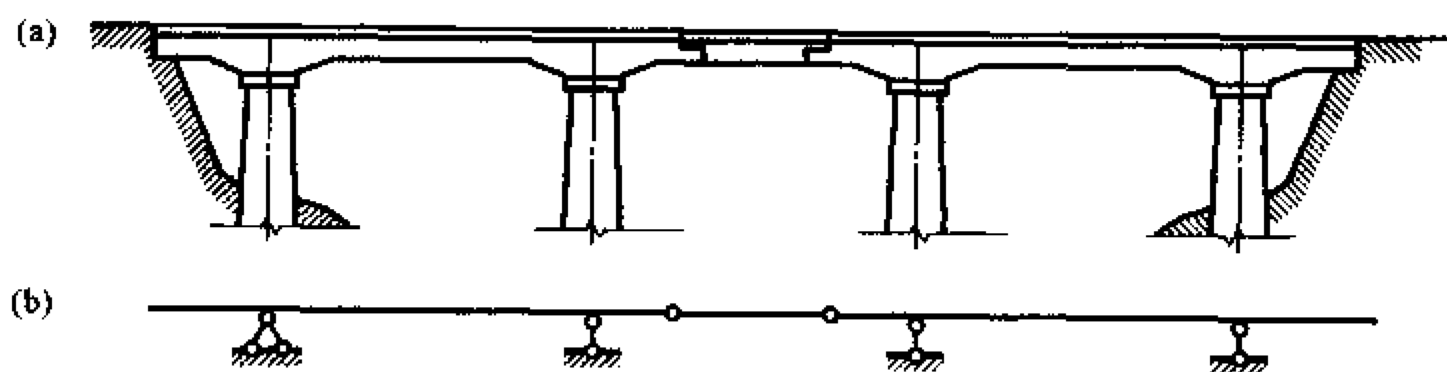


图　3-6

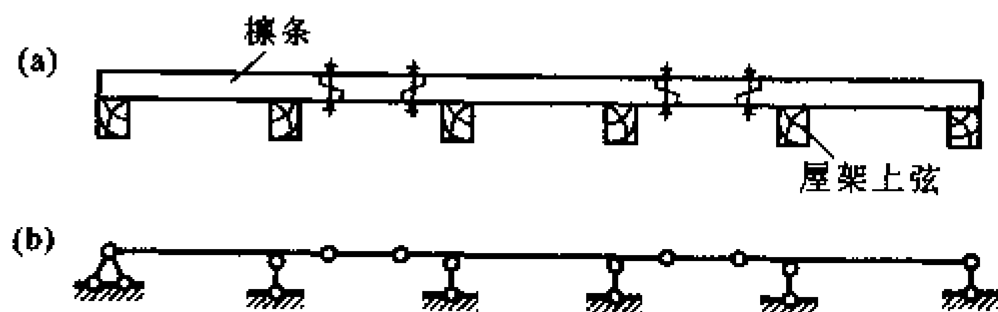


图　3-7

一般将由直杆组成、且全部结点或部分结点是刚性联结的结构称为刚架。当刚架的杆件轴线以及荷载均在同一平面内，而且无多余约束存在时，就称为静定平面刚架。上述刚性结点具有

约束杆端相对转动的作用，在结构变形时，与刚性结点联结的各杆杆端应具有相同的转角。图3-8所示为站台雨蓬结构常采用的悬臂刚架及其相应的计算简图；图3-9所示为房屋建筑结构中的三铰刚架及其相应的计算简图。

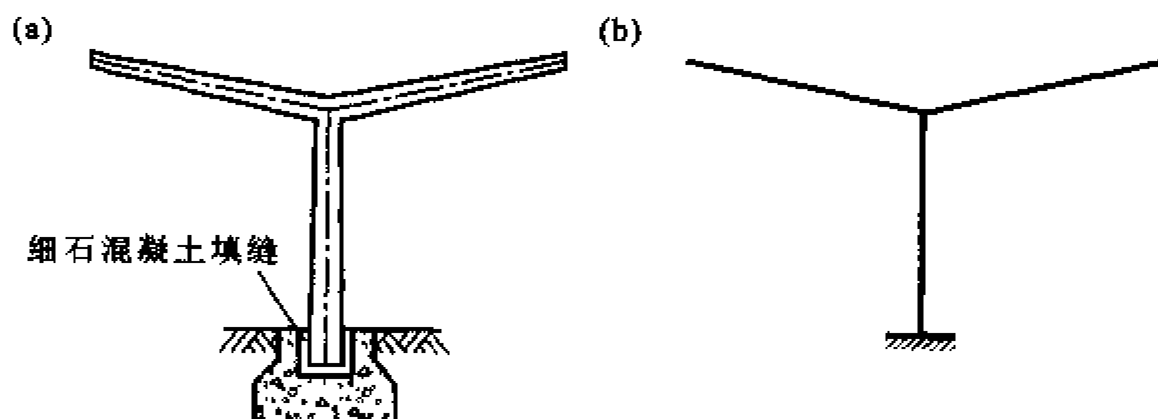


图 3-8

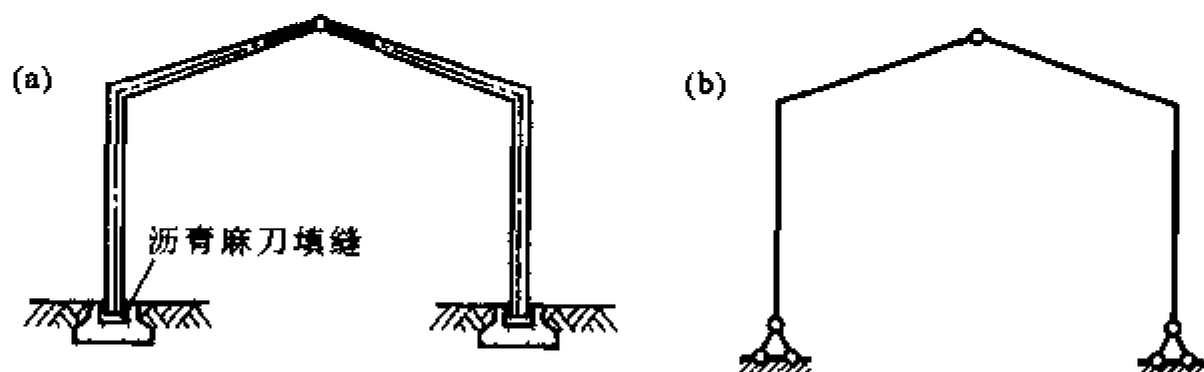


图 3-9

刚架的几何不变性一般是依靠结点的刚性联结来维持的，这样就不需要加设斜杆，所以刚架结构一般具有杆件数量较少、内部可利用空间大的优点。此外，由于刚结点能承受和传递弯矩，因此有利于减小结构杆件中弯矩的峰值。工程中采用的刚架大多数是超静定的，但超静定刚架的求解需要建立在静定刚架受力分析的基础上。

3-2-1 刚架式杆件的内力以及与荷载的关系

对于一般的平面刚架式杆件来说，横截面上有三种内力：沿杆件轴线方向的轴力 F_N、垂直于杆件轴线方向的剪力 F_Q 和弯矩 M。通常，在竖向荷载作用下，水平梁的各横截面上只产生弯矩和剪力。由于分析的需要，现对杆件内力的正负号作出以下规定：轴力以拉力为正，压力为负；剪力以使微段隔离体顺时针方向转动为正，逆时针方向转动为负；弯矩的正负号不作硬性规定，弯矩图应画在受拉一侧。通常，梁中的弯矩仍以使截面下侧纤维受拉为正，受压为负。

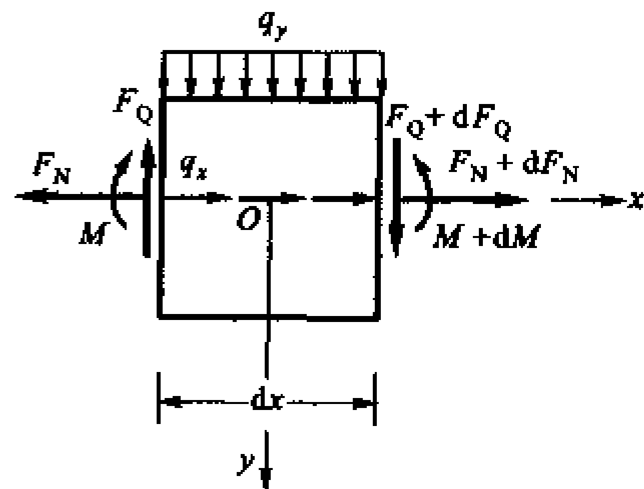


图 3-10

按照材料力学的原理，刚架式杆件的内力之间以及内力与荷载集度之间存在某些确定的关系。图3-10所示为从荷载连续分布的平面刚架式杆件上截取的微段隔离体，微段上的分布荷载可视为均布的，它在杆件轴线方向

和垂直杆件轴线方向的分量分别记为 q_x 和 q_y。图中的截面内力都是按正向画出的。应用静力平衡条件，并略去高阶微量，可导出在图示坐标下杆件内力之间以及内力与荷载集度之间的以下微分关系：

$$\frac{\mathrm{d}F_N}{\mathrm{d}x}=-q_x \tag{3-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}F_Q}{\mathrm{d}x}=-q_y \tag{3-2}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=F_Q \tag{3-3}$$

由式(3-2)和(3-3)可得

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2}=\quad q_y \tag{3-4}$$

由以上各微分关系可知：

(1) 在无横向荷载($q_y=0$)的区段，杆件剪力保持为常数，对应的剪力图形为与杆件轴线平行的直线，而弯矩图形则为倾斜的直线，其斜率就等于杆中的剪力。

(2) 在杆件剪力为零处，弯矩图的切线与杆件轴线平行，此时弯矩取得极值；在无剪力的区段，杆件的弯矩保持为常数，对应的弯矩图为与杆件轴线平行的直线。

(3) 在有横向均布荷载的区段，剪力图为倾斜的直线，而弯矩图则为二次抛物线；对于有横向非均匀分布荷载作用的区段，根据以上的微分关系，荷载函数的幂次提高一次，则剪力和弯矩图形的函数幂次也相应提高一次。

(4) 在无轴向荷载的区段，杆件的轴力保持为常数；在有轴向均布荷载的区段，轴力图为倾斜直线。

当杆件上作用有轴向、横向集中荷载或集中力矩时，由平衡条件可知荷载作用点处的轴力、剪力或弯矩会发生突变，其突变量就等于上述荷载的数值。

利用上述内力之间以及内力与荷载之间的微分关系，在绘制内力图时可以按荷载情况在结构上划分区段，只要求得各分段点上内力的控制竖标，就可以将内力图形作出。有时，可以利用上述关系直接确定某些分段点上内力的控制竖标，从而快捷地绘制出内力图形。

结构的内力常用图形形象地表达。结构力学中规定内力图竖标一般应垂直于杆件轴线画出。在绘制轴力图和剪力图时，图形的正号部分可画在杆件的任一侧，负号部分则画在另一侧，并需注明正负号；而弯矩图则应画在杆件受拉一侧，不注正负号。图 3-11a 所示为一伸臂梁，受横向均布荷载、集中荷载和集中力矩作用。根据材料力学可以求得梁的内力如图 3-11b、c 所示。从材料力学基本概念的角度分析，上述梁的内

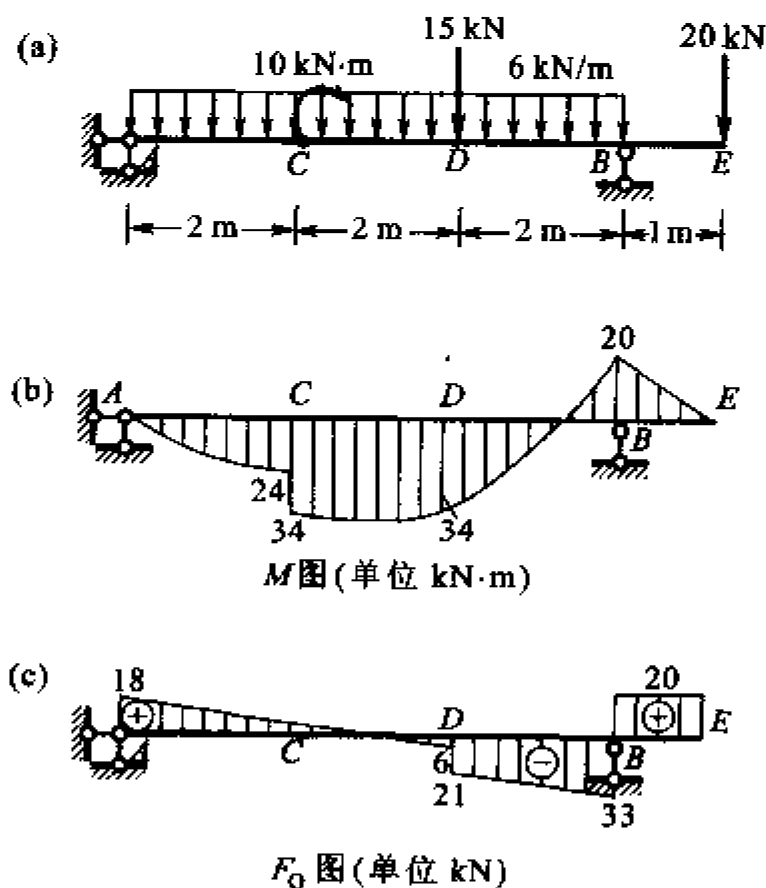


图　3-11

力图形有以下主要特点:弯矩图形在 AB 段为二次抛物线,在 BE 段为一倾斜的直线;在 C 截面处弯矩发生突变,突变值等于作用于该截面处集中力矩的数值 10 kN·m;C 点左、右两侧截面上的剪力并无突变,所以弯矩图的斜率是相等的;D 截面处因有横向集中荷载作用,D 点左、右弯矩图的斜率是不同的,所以弯矩图形在 D 点是非光滑连续的;剪力图形在 AB 段为倾斜直线,在 BE 段为一水平线;在 D 点处剪力发生突变,突变值就等于横向集中荷载 15 kN;由于横向分布荷载为均布,DB 段剪力图的斜率与 AD 段相同;剪力图中的零点对应于弯矩图中极值点的位置。

3-2-2 静定梁

材料力学中已介绍了一般单跨静定梁的内力计算,结构力学中将以此为基础,重点讨论多跨静定梁的内力计算和内力图的绘制。在此之前先简要介绍有关斜梁的基本特点。

图 3-12a、b、c 表示相同的简支斜梁,分别受到集度为 q 的不同类型的均布荷载作用。图 3-12a中的 q 意为沿梁水平投影长度上均布荷载的集度,在工程上对应如屋面活载、楼梯活载和积雪荷载等以水平投影面积计算的均布荷载;图 3-12b 中的 q 意为沿梁自身长度上均布荷载的集度,在工程上对应如结构自重、装饰重量等均布荷载;图 3-12c 中的均布荷载 q 是垂直于杆件方向作用的,在工程上对应如由流体压力形成的均布荷载。上述三种荷载作用下梁的内力分别如图 3-12d~l 所示,这些内力均可以按照材料力学,利用图 3-12m、n、o 所示的隔离体平衡条件求得。此时,可用沿杆件轴线方向和垂直于杆件轴线方向力的平衡方程以及力矩平衡方程,分别求出梁上任一截面 K 处的轴力、剪力和弯矩。

由图 3-12 可知简支斜梁的内力有以下特点:

(1) 斜梁的弯矩和剪力以图 3-12c 荷载时为最大,图 3-12b 时其次,图 3-12a 时为最小;斜梁的轴力在图 3-12c 荷载时为常数,而图 3-12a、b 两图时则是线性变化的。

(2) 当均布荷载 q 按梁水平投影长度上的集度给出时(图 3-12a),梁的截面弯矩就等于相同跨度水平梁相应位置上的截面弯矩值。

(3) B 支座链杆方向的改变不会引起斜梁弯矩和剪力的变化。例如,梁 B 端的杆端剪力,可由梁绕 A 支座的力矩平衡条件完全确定,B 支座链杆方向的改变只影响杆端轴力,而不会改变杆端剪力的数值。

对于多跨静定梁的受力分析,一般应先区分基本部分和附属部分,然后按照先附属部分、后基本部分的顺序进行计算。现以图 3-13a 所示的多跨静定梁为例,说明多跨静定梁的求解过程。该梁 BE 段为一伸臂梁,可以独立地承受竖向荷载,可视为基本部分;AB 和 EG 段需依靠基本部分的支承才能承受竖向荷载并保持平衡,所以是附属部分。梁的层叠图和隔离体图分别如图 3-13b、c 所示。

由附属部分 EFG 的平衡条件,可求得支座反力 $F_{yF}=3qa$,铰 E 处的约束力 $F_{xE}=\sqrt{3}qa$,$F_{yE}=4qa$。根据铰 E 以左梁段的平衡条件 $\sum F_x=0$,可得铰 B 处的水平约束力 F_{xB} 和支座 A 处的水平反力 $F_{xA}=\sqrt{3}qa$。再由附属部分 AB 的平衡条件求得铰 B 处的竖向约束力 $F_{yB}=4qa$。铰 B、E 两处附属部分与基本部分之间的约束力属于作用力与反作用力,其大小相等而方向相反,如图 3-13c 所示。求得各支座反力以及铰 B、E 处的约束力后,就可以按照材料力学中单跨静定梁的

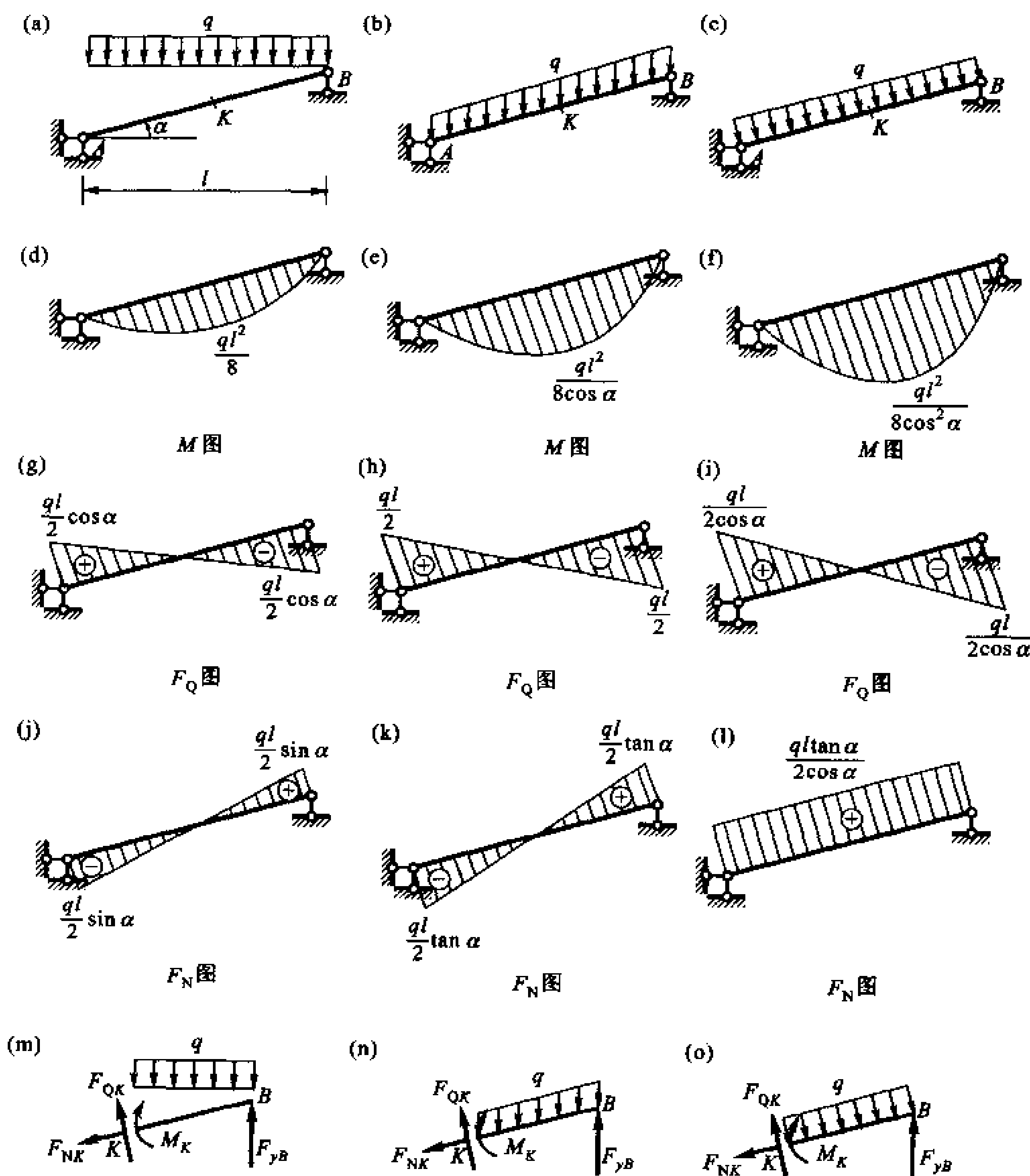


图 3-12

内力计算方法进行，逐段绘出全梁的内力图，如图 3-13d、e、f 所示。

以上隔离体的运用属于结构分析中的一种基本方法。此外，静定结构的内力图也常常可以通过运用力学的某些基本概念，如内力与荷载间的微分关系，比较快捷地绘制。例如，对于图 3-13a 所示的多跨静定梁的弯矩图来说可以如下绘制：先由悬臂部 FG 段算得梁在支座 F 处的负弯矩为 qa^2；铰 E 处杆端弯矩值已知为 $3qa^2$ 上侧受拉，将 E、F 两点处的弯矩连一虚线，并以此为基线叠加竖向荷载 $6qa$ 引起的简支梁弯矩图，即得到 EF 段的弯矩图；按照梁无横向力作用的区段剪力（即弯矩图斜率）不变的原则，可以将上述弯矩图形按直线延长至 D 支座处；AB 杆的弯矩图形已在材料力学中熟知，竖向分布荷载传至铰 B 后引起梁在 C 支座处的负弯矩为

$4qa^2$；最后在 C、D 两点弯矩连线上叠加 CD 段的简支梁弯矩，得到全梁的弯矩图。

由以上分析过程可知，运用基本概念直接绘制内力图也是遵循先附属部分，再基本部分的原则进行。采用这种分析方法不仅常可达到快捷的目的，而且对熟练力学基本概念的运用和增强判断与定性分析能力很有益处。

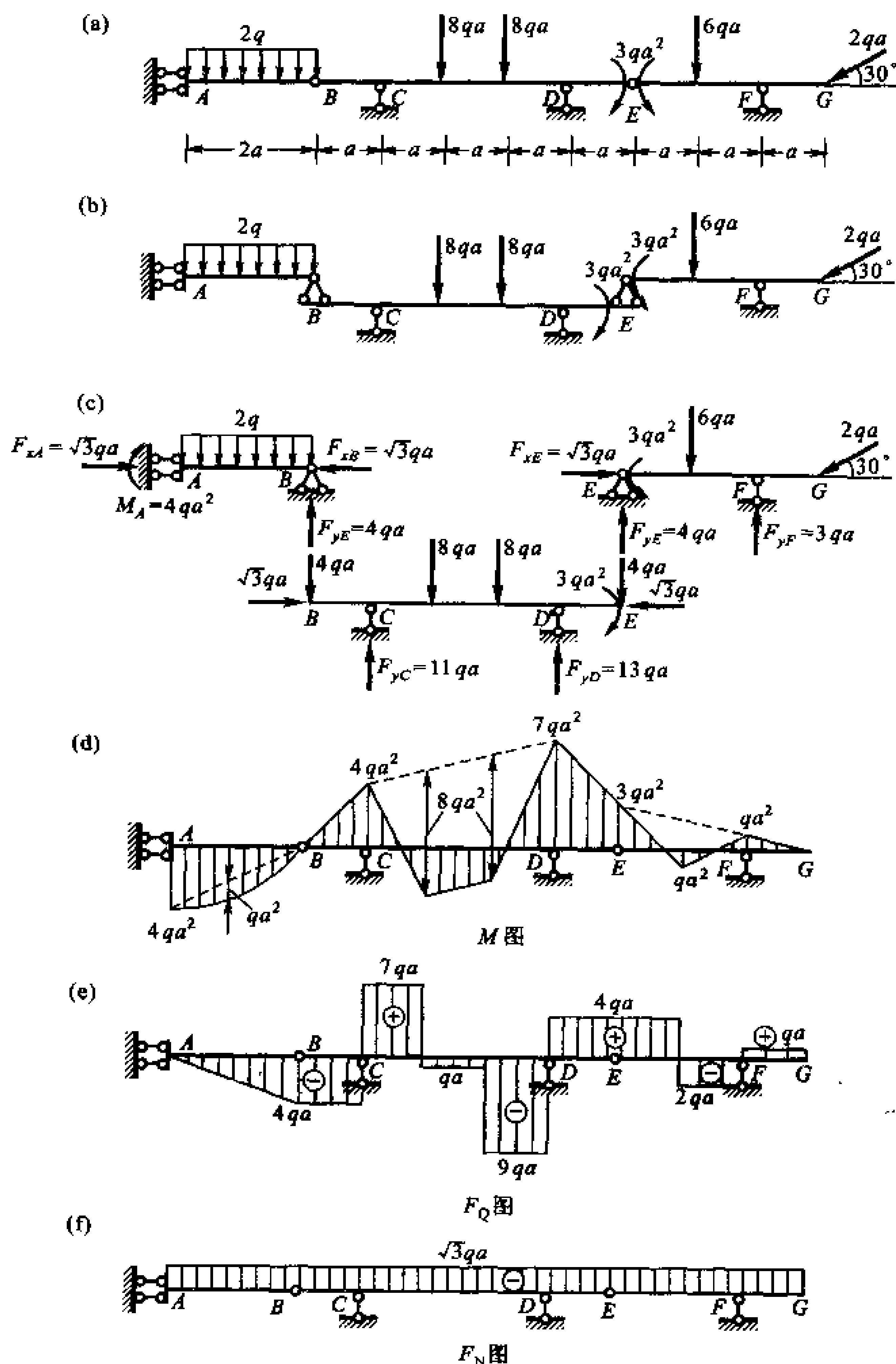


图 3－13

应当注意的是，区分结构的基本部分与附属部分有时还与荷载作用的方向有关。对于图3-13梁上作用于G点处的斜向荷载的水平分力来说，梁的AB段就是基本部分，因为AB段可以独立承受梁的轴向荷载；BE段就是附属部分，因为其无法独立承受上述荷载；而EG段则又为BE段的附属部分。所以，作用于G点处的斜向荷载会使梁的全长上产生轴向压力，如图3-13f所示。

图3-14梁的荷载是作用在简支的纵向次梁上，通过横梁支座再传至主梁，此时主梁所受荷载称为间接荷载或结点荷载。实际上，图中的纵梁可以看作是主梁的附属部分，求解时只需算出各横梁支座的反力，并将其反向作用于主梁上即可。因此，主梁承受的是结点荷载。

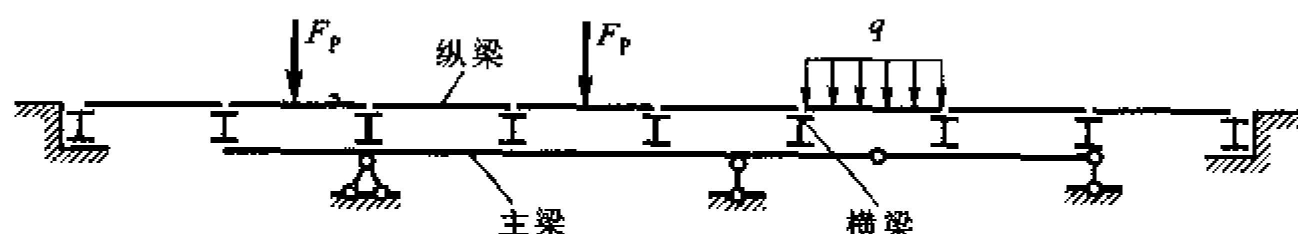


图 3-14

例3-1 试绘制图3-15a所示多跨静定梁的内力图。

解 梁铰C以左是基本部分，右边则是附属部分。在图示荷载作用下梁无轴力存在。

(1) 隔离体法：按层叠关系画出隔离体图如图3-15b所示。先由附属部分计算铰C处的约束力和D支座的竖向反力为$F_{yC}=4.5\ \text{kN}$，$F_{yD}=-4.5\ \text{kN}$，负号说明反力的实际方向与图中所设的方向相反。将F_{yC}反向作为基本部分的荷载之一，算得支座反力$F_{yA}=4.2\ \text{kN}$，$F_{yB}=10.3\ \text{kN}$。由此可求出各杆件的内力，并分别作出弯矩和剪力图，如图3-15c、d所示。

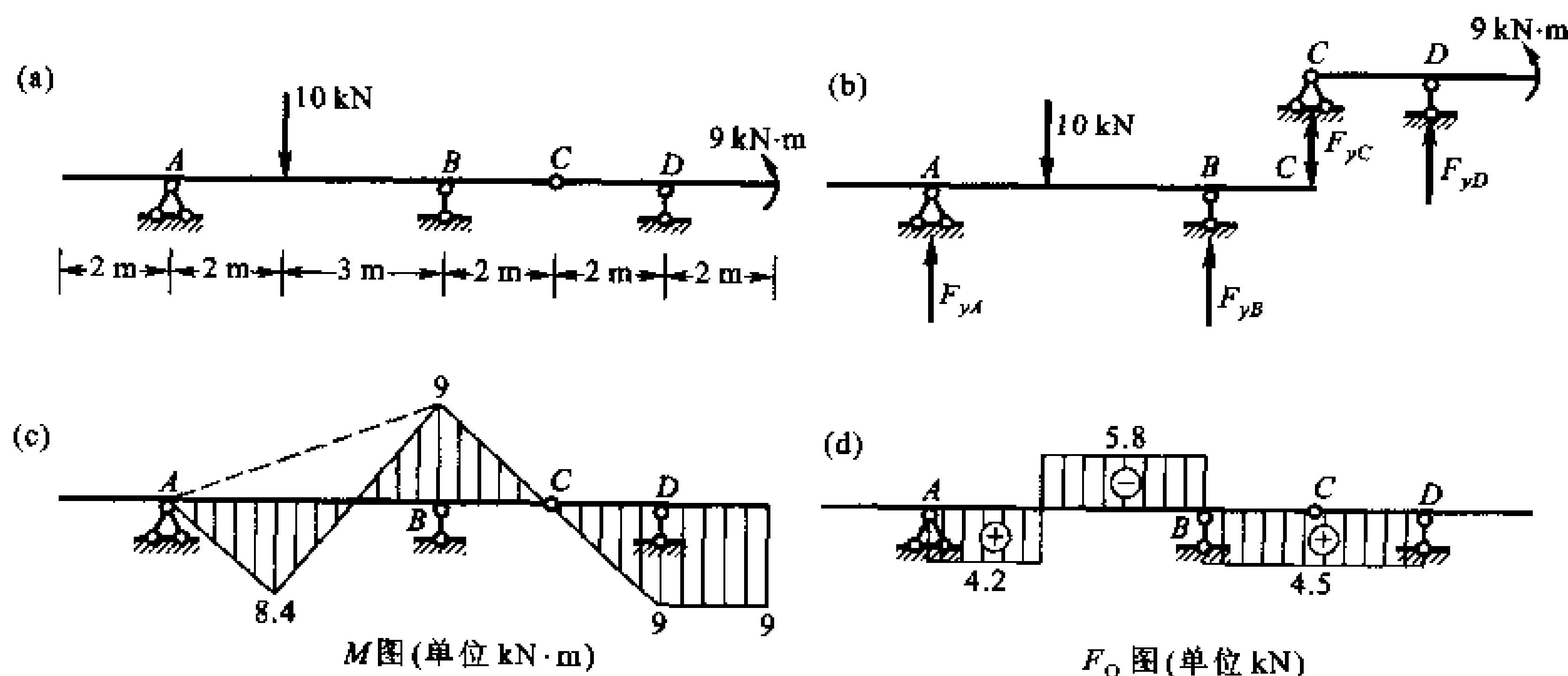


图 3-15

(2) 概念法：D支座以右杆件无剪力，弯矩图形应为竖标等于9 kN·m的水平线；铰C处弯矩值为零，直线连接D、C处弯矩，并根据杆件剪力为常数的特点将弯矩图延长至B点处；虚线连接A、B两处弯矩并叠加荷载10 kN的简支梁弯矩，即得梁全长的弯矩图形。杆件的剪力就等于弯矩图形的斜率。

例 3-2　试绘制图 3-16a 所示多跨静定梁的弯矩图。

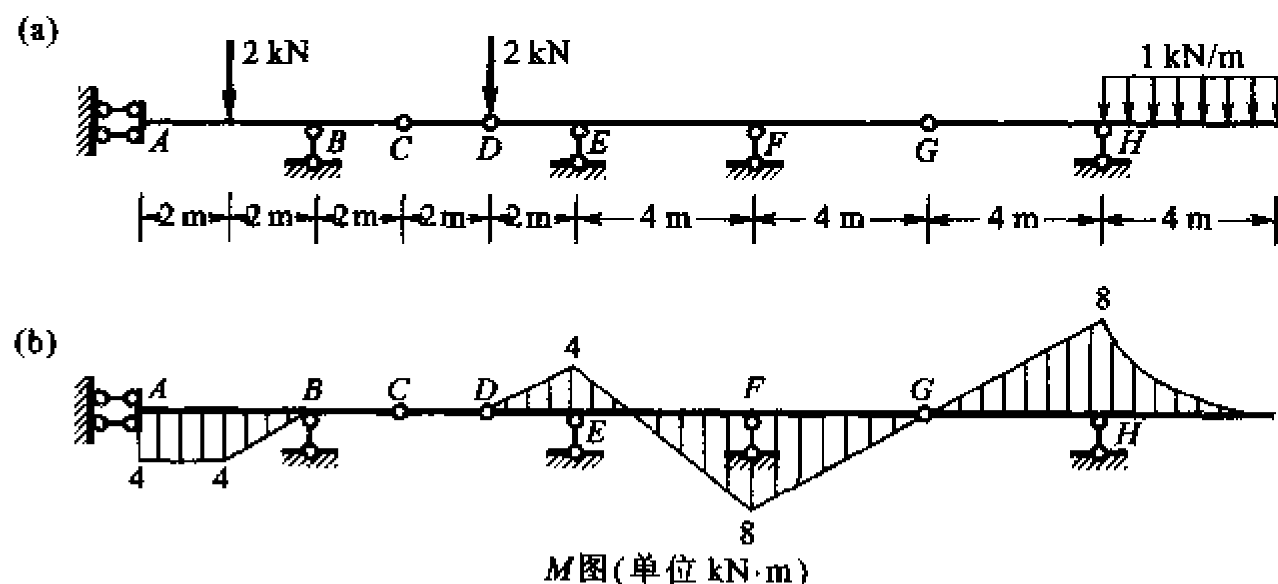


图　3-16

解　梁的 AC 和 DG 段均为基本部分，CD 段和铰 G 以右为附属部分。

概念法：H 点以右为悬臂杆，在均布荷载作用下弯矩图形为二次抛物线，支座处梁上侧受拉，弯矩值为 8 kN·m；直线连接 G、H 两点弯矩并延长至 F 点；判定 CD 杆无内力发生，按 DE 段为悬臂作出该段弯矩图形，并将 E、F 两处弯矩直线连接；AC 段由滑动支座的特点可确定 B 支座竖向反力为向上 2 kN，算得荷载作用点弯矩值为 4 kN·m，荷载作用点以左杆件剪力为零，弯矩图形与杆件平行。以上结果如图 3-16b 所示。

例 3-2 中作用于 D 结点上的外荷载全部由 DG 杆承受，而不引起 CD 杆的内力。由此可见，当有集中力作用于结构基本部分与附属部分联结部位时，仍只使基本部分产生内力。

3-2-3　静定刚架

从几何构造的角度上看，静定刚架可以是单个刚片与基础联结构成(图 3-17a)，相当于单跨静定梁的情况；也可以由多个刚片通过铰或链杆联结，并与基础联结构成(图 3-18a)，相当于多跨静定梁的情况。在静定平面刚架的受力分析中，通常是先求支座反力和联结各部分的铰或链杆中的约束力，然后求出控制截面的内力，最后作内力图。几何构成上由多个刚片构成的刚架，也常可以像多跨静定梁一样分为基本部分和附属部分。此时，受力分析也应该从附属部分开始，然后向基本部分推进。应当注意的是：由两个以上刚片组成的静定刚架，并不一定都存在基本与附属的关系。例如，图 3-2 所示的三铰刚架就不存在附属部分。静定刚架的受力分析可采用隔离体平衡的方法，也常可运用力学基本概念，快捷地作出刚架的内力图。

图 3-17a 所示的刚架是由单个刚片与基础构成的，可以利用刚架的整体平衡条件方便地求出各支座反力。根据平衡条件，有

$$\sum F_x=0,\quad 6\ \text{kN}+10\ \text{kN}-F_{xB}=0$$

$$F_{xB}=16\ \text{kN}\ (\leftarrow)$$

$$\sum M_B=0,\quad F_{yA}\times 6\ \text{m}+6\ \text{kN}\times 8\ \text{m}+10\ \text{kN}\times 3\ \text{m}-20\ \text{kN/m}\times 6\ \text{m}\times 3\ \text{m}=0$$

$$F_{yA}=47\ \text{kN}\ (\uparrow)$$

$$\sum M_A=0,\quad 6\ \text{kN}\times 8\ \text{m}+10\ \text{kN}\times 3\ \text{m}+20\ \text{kN/m}\times 6\ \text{m}\times 3\ \text{m}-F_{yB}\times 6\ \text{m}=0$$

$$F_{yB}=73\ \text{kN}\ (\uparrow)$$

在计算杆端内力时，可以截取刚架的结点或构件作为隔离体，例如图 3-17b～e 所示。为了使内力的符号不致发生混淆，可在内力符号的右下方加两个下标，标明杆端内力所属的杆件，其中前一个下标表示内力所属的杆端截面，后一个下标表示同一杆件的另一端。以弯矩为例，M_{CA}、M_{CD}和M_{CE}分别表示 C 结点下侧、右侧和上侧截面上的弯矩。

杆端内力可以利用上述刚架结点和杆件的隔离体图，按平衡条件依次求得。例如，利用 CE 段的隔离体图（图 3-17b），由平衡条件得

$$M_{CE}=6\ \text{kN}\times 2\ \text{m}=12\ \text{kN·m}\ (\text{左侧受拉})$$

$$F_{QCE}=6\ \text{kN},\quad F_{NCE}=0$$

利用 AC 段的隔离体图（图 3-17c），得

$$M_{CA}=10\ \text{kN}\times 3\ \text{m}=30\ \text{kN·m}\ (\text{左侧受拉})$$

$$F_{QCA}=-10\ \text{kN},\quad F_{NCA}=-47\ \text{kN}$$

再利用 C 结点的隔离体图（图 3-17d），由$\sum M=0$、$\sum F_y=0$ 和$\sum F_x=0$ 得

$$M_{CD}=M_{CA}-M_{CE}=18\ \text{kN}\ (\text{上侧受拉})$$

$$F_{QCD}=F_{NCA}=47\ \text{kN},\quad F_{NCD}=F_{QCA}-F_{QCE}=-16\ \text{kN}$$

以此类推，可以求得其余各杆端内力，然后可以根据杆件内力的变化规律与特点作出刚架的内力

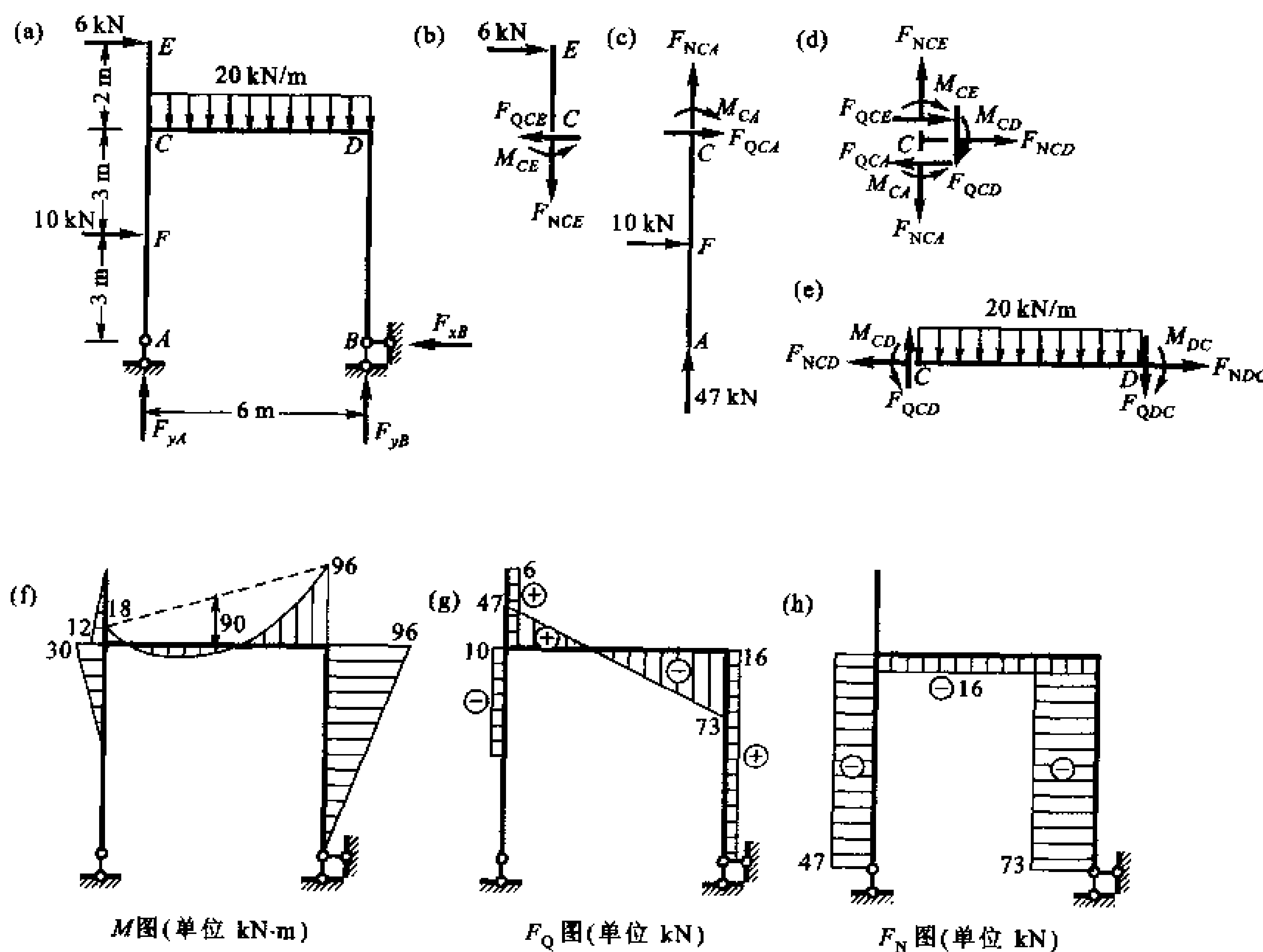


图 3-17

图，分别如图 3－17f、g、h 所示。

在作静定刚架的内力图时，常不一定需要画出所有杆件和结点的隔离体图，有时也可以直接利用力学基本概念快捷地进行。例如，在绘制上述刚架的弯矩图时，根据 A 支座竖向反力不会使AC 杆产生弯矩的特征，CE 和AC 杆的弯矩图形可一目了然；B 支座的水平反力易求得，乘以杆长即得杆端弯矩 M_{DB}，并有 $M_{DC}=M_{DB}$；根据 C 结点的力矩平衡的条件可求得杆端弯矩 M_{CD}，然后以 M_{DC} 和 M_{CD} 的连线为基线叠加简支梁的弯矩图则得到刚架的最终弯矩图。

图 3－18a 所示的刚架是由两个刚片与基础联结而成。D 处滑动铰以左部分与地基形成无多余约束的几何不变体系，属基本部分；D 以右为附属部分。刚架的内力计算应遵循先附属部分，后基本部分的顺序进行。

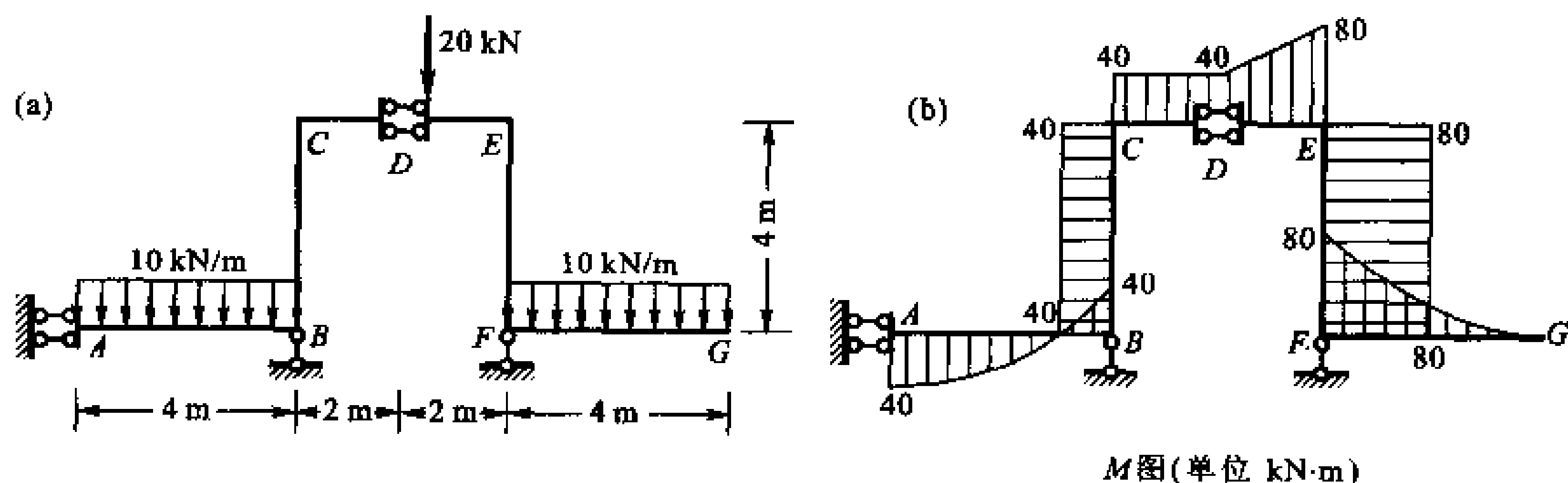


图　3－18

绘制该刚架的弯矩图时可以按以下步骤进行：先绘制附属部分悬臂杆 FG 在均布荷载作用下的弯矩图，得 $M_{FG}=M_{FE}=80\ \mathrm{kN\cdot m}$；由 F 点处支座特征可知EF 杆无剪力，弯矩图形应与杆件轴线平行；由 D 处滑动铰的特点可知 DE 段剪力数值等于 －20 kN，可算得 D 点的弯矩值 $M_{DE}=80\ \mathrm{kN\cdot m}-20\ \mathrm{kN}\times 2\ \mathrm{m}=40\ \mathrm{kN\cdot m}$；$CD$ 和 CB 杆均无剪力，弯矩图形与杆件轴线平行；求得 $M_{BA}=40\ \mathrm{kN\cdot m}$ 后作出均布荷载作用下 AB 杆的弯矩图即得到刚架的最终弯矩，如图 3－18b 所示。因刚结点 B、C、E、F 等仅联结两个杆件，再求得其中一个杆端弯矩后，按结点力矩平衡条件可知另一杆端弯矩应数值相等，方向相反。

例 3－3　试绘制图 3－19a 所示刚架的内力图。

解　先计算支座反力，考虑刚架整体的平衡条件，有

$$\sum F_x=0,\quad F_{xA}=0$$

$$\sum M_D=0,\quad F_{yA}\times 4\ \mathrm{m}-2\ \mathrm{kN/m}\times 2\ \mathrm{m}\times 5\ \mathrm{m}-2\ \mathrm{kN/m}\times 4\ \mathrm{m}\times 2\ \mathrm{m}=0$$

$$F_{yA}=9\ \mathrm{kN}\ (\uparrow)$$

$$\sum M_A=0,\quad 2\ \mathrm{kN/m}\times 4\ \mathrm{m}\times 2\ \mathrm{m}-2\ \mathrm{kN/m}\times 2\ \mathrm{m}\times 1\ \mathrm{m}-F_{yD}\times 4\ \mathrm{m}=0$$

$$F_{yD}=3\ \mathrm{kN}\ (\uparrow)$$

各杆端内力的分析与计算如下：

悬臂杆 EB 轴力为零，弯矩和剪力分别为

$$M_{BE}=2\ \mathrm{kN/m}\times 2\ \mathrm{m}\times 1\ \mathrm{m}=4\ \mathrm{kN\cdot m}\ (\text{上侧受拉})$$

$$F_{QBE}=-2\ \mathrm{kN/m}\times 2\ \mathrm{m}=-4\ \mathrm{kN}$$

因为 A 支座处无水平反力，所以 AB 杆上无剪力和弯矩产生，其轴力为

$$F_{NAB}=F_{NBA}=-F_{yA}=-9\ \text{kN}\ (压力)$$

BC 杆上仍无剪力，其轴力为

$$F_{NBC}=F_{NCB}=-F_{yA}+2\ \text{kN/m}\times 2\ \text{m}=-9\ \text{kN}+4\ \text{kN}=-5\ \text{kN}\ (压力)$$

由 *B* 结点的力矩平衡条件以及杆件剪力为零的特点可知

$$M_{BC}=4\ \text{kN}\cdot\text{m}\ (左侧受拉),\quad M_{CB}=M_{BC}=4\ \text{kN}\cdot\text{m}\ (左侧受拉)$$

斜杆 *CD* 简支端弯矩为零，由 *C* 结点隔离体(图 3－19b)的力矩平衡条件可得

$$M_{CD}=4\ \text{kN}\cdot\text{m}\ (上侧受拉)$$

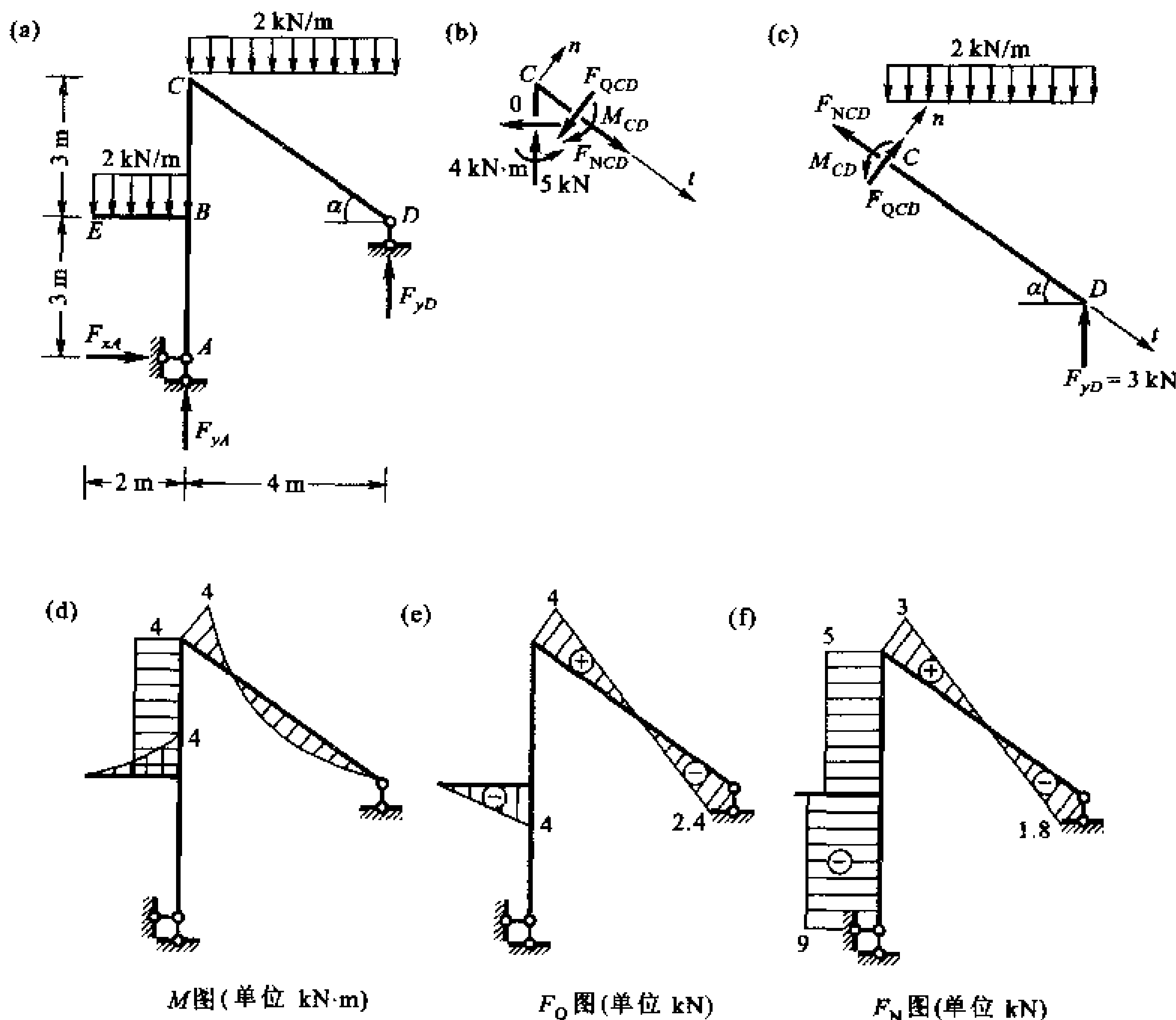


图 3－19

为求斜杆的杆端剪力和轴力，可作图 3－19c 所示的隔离体图，取 *CD* 杆方向为 *t* 轴，垂直 *CD* 杆方向为 *n* 轴。将 *D* 支座的竖向反力沿上述两个方向分解，就可得到 *D* 端的剪力和轴力分别为

$$F_{QDC}=-F_{yD}\cos\alpha=-3\ \text{kN}\times\frac{4}{5}=-2.4\ \text{kN}$$

$$F_{NDC}=-F_{yD}\sin\alpha=-3\ \text{kN}\times\frac{3}{5}=-1.8\ \text{kN}\ (压力)$$

由上述隔离体沿 *t*、*n* 轴方向力的投影方程可得

$$\sum F_t=0,\quad F_{NCD}+F_{yD}\sin\alpha-2\ \text{kN/m}\times 4\ \text{m}\cdot\sin\alpha=0$$

$$F_{NCD}=3\ \text{kN}$$

$$\sum F_n=0,\quad F_{QCD}+F_{yD}\cos\alpha-2\ \text{kN/m}\times4\ \text{m}\cdot\cos\alpha=0$$

$$F_{QCD}=4\ \text{kN}$$

求得各杆端力之后，即可根据杆件内力的变化规律作出内力图，分别如图 3－19d、e、f 所示。

静定刚架杆端内力的计算，可以从不同的角度出发采用不同的隔离体。例 3－3 中 CD 杆端的弯矩 M_{CD}，也可以采用图 3－19c 所示的隔离体，由力矩平衡条件 $\sum M_C=0$ 求得；杆端剪力 F_{QCD} 和轴力 F_{NCD} 也可以采用图 3－19b 所示的隔离体，由沿 t、n 轴方向力的投影方程求得。

例 3－4　试绘制图 3－20a 所示刚架的弯矩图。

解　刚架 A 支座处的水平反力显然为零。根据刚架的几何尺寸、构造以及荷载的情况可知，刚架处于对称的受力状态，此时刚架的内力也一定对称。由此可以断定，铰 F 处的剪力必定为零。因为 F_{QFC} 与 F_{QFD} 属于作用力与反作用力，大小相等但方向相反，若剪力不为零则 FC 和 FD 杆的内力就不可能对称。

因铰 F 处无剪力，C、D 两结点处的杆端弯矩可分别由荷载与距离的乘积求得，其数值均为 $M_{CF}=M_{DF}=30\ \text{kN}\times2\ \text{m}=60\ \text{kN·m}$。然后，利用结点力矩平衡、$AC$ 和 BD 段剪力为常数以及铰 E、G 处弯矩为零的特点，可快捷地作出该刚架的弯矩图，如图 3－20b 所示。

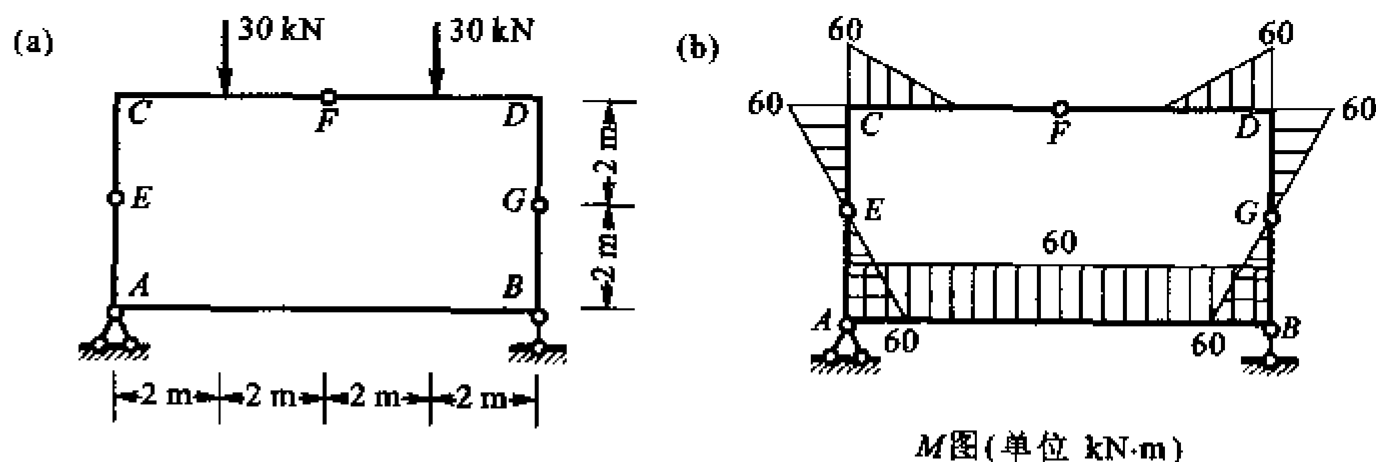


图　3－20

例 3－4 的刚架从几何构造上看由三个刚片组成，上半刚架可以看作是下半刚架的附属部分。利用了受力状态对称的特点，便可以快捷地作出刚架的弯矩图。但若刚架的受力状态不对称，例如铰 F 不居中，则需要先按照求解三刚片问题的方法求出附属部分的支座反力，绘出附属部分的弯矩图，然后将上述支座反力反向作用于基本部分，绘出基本部分的弯矩图。

例 3－5　试绘制图 3－21a 所示刚架的弯矩图。

解　此刚架 D 支座处无水平反力，但三个支座的竖向反力无法由余下的两个独立的整体平衡方程解得。为此，先分析刚架的几何构造。刚片 DGE 和 DHF 分别由两铰对外联系，都可以视作链杆。将杆 AEC 和 BFC 分别视作刚片Ⅰ、Ⅱ，基础作为刚片Ⅲ，体系的几何构造如图 3－21b 所示。可见，三刚片之间由不在一直线上的三个铰两两联系，体系几何不变，并且无多余约束。

图 3－21a 所示结构的几何构造和求解方法实际上与图 3－2 所示三铰刚架相同。即可以将其中的一个铰，例如铰 C 的约束解除，代之以成对的未知约束力 F_{xC} 和 F_{yC}，然后分别截取刚片 AEC 和 BFC 为隔离体，如图 3－21c、d 所示，分别列出对另两个铰的力矩平衡方程。例如，对于 AEC 杆（图 3－21c），A 支座的竖向反力 F_{yA} 和 DE 段的作用力 F_{DE} 经过虚铰（Ⅰ，Ⅲ），不对该点产生力矩，由此可列出力矩平衡方程

$$\sum M_{(\text{I},\text{III})}=0,\quad -F_{xC}\times2\ \text{m}+F_{yC}\times8\ \text{m}+10\ \text{kN}\times2\ \text{m}=0$$

同理，可截取 BFC 杆为隔离体(图 3-21d)，可列出对虚铰(Ⅱ，Ⅲ)的力矩平衡方程

$$\sum M_{(\text{Ⅱ},\text{Ⅲ})}=0,\quad F_{xC}\times 2\ \text{m}+F_{yC}\times 8\ \text{m}-3\ \text{kN/m}\times 8\ \text{m}\times 4\ \text{m}=0$$

将以上两方程联立，解得

$$F_{xC}=29\ \text{kN},\quad F_{yC}=4.75\ \text{kN}$$

由此可求得各支座反力，并进而求得刚架的最终弯矩如图 3-21e 所示。

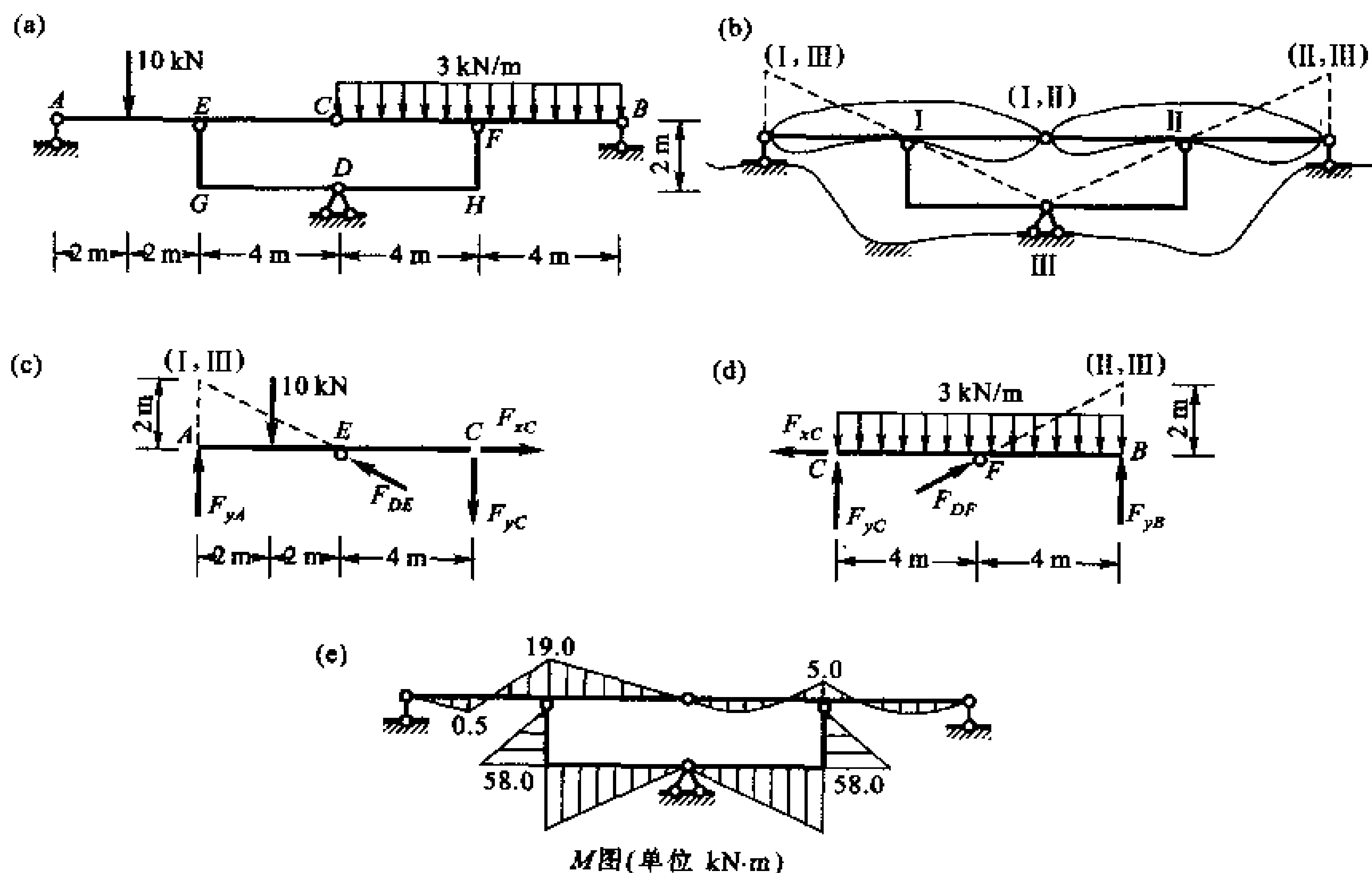


图 3-21

例 3-5 的刚架也可以利用结构的对称性进行分析，此时需将原荷载分解为一组对称荷载和另一组反对称荷载。在对称荷载作用下铰 C 处的剪力必定为零，由此易解得各支座反力；在反对称荷载作用下 A、B 支座反力大小相等、方向相反，由此也易求得各支座反力。将上述两种情况下刚架的弯矩图叠加，即可得到刚架的最终弯矩图。

有一些刚架的几何构造比较复杂，不能归结到两刚片或三刚片的简单组成规则上。分析此类刚架时仍应注意避免过多方程的联立求解。例如，欲分析图 3-22a 所示的刚架，可以先假设 C 支座的未知反力为 X[①]，再根据局部或整体的平衡条件，将各支座反力和铰联结中的相关约束力用 X 来表达，如图 3-22b 所示。最后，以刚架整体作为隔离体，按力矩平衡方程 $\sum M_A=0$，有

$$X\times 3a+(F_P-2X)\cdot a+(F_P-2X)\times 2a-F_P\cdot a=0$$

解得

① 由于未知反力有时是未知的广义力，为叙述的统一和完整，所以本书仍沿用以往教材中使用的 X 表示，对于文中其所对应的物理量和相应单位，则视具体问题而定。

$$X=\frac{2}{3}F_P$$

以下的问题便可以迎刃而解。

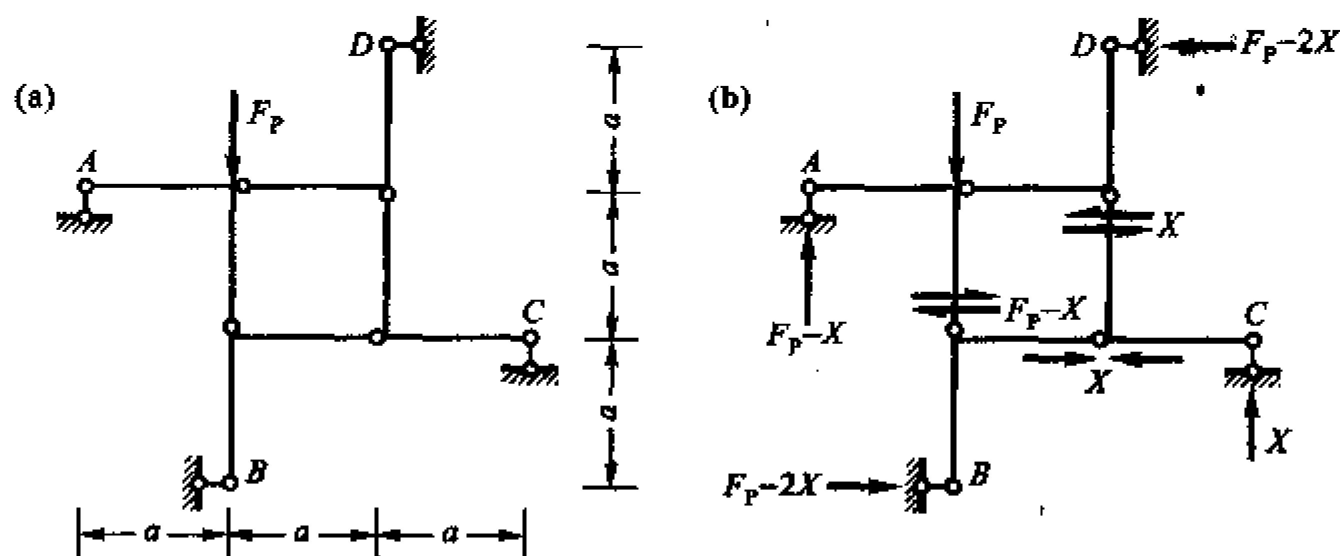


图 3-22

§3-3 三 铰 拱

拱式结构在房屋建筑、地下建筑、桥梁及水工建筑中都常采用。从几何构造上讲，拱式结构可以分为无多余约束的三铰拱(图 3-23a、b)和有多余约束的两铰拱和无铰拱(图 3-23c、d)。前者属于静定结构，而后者则属于超静定结构。

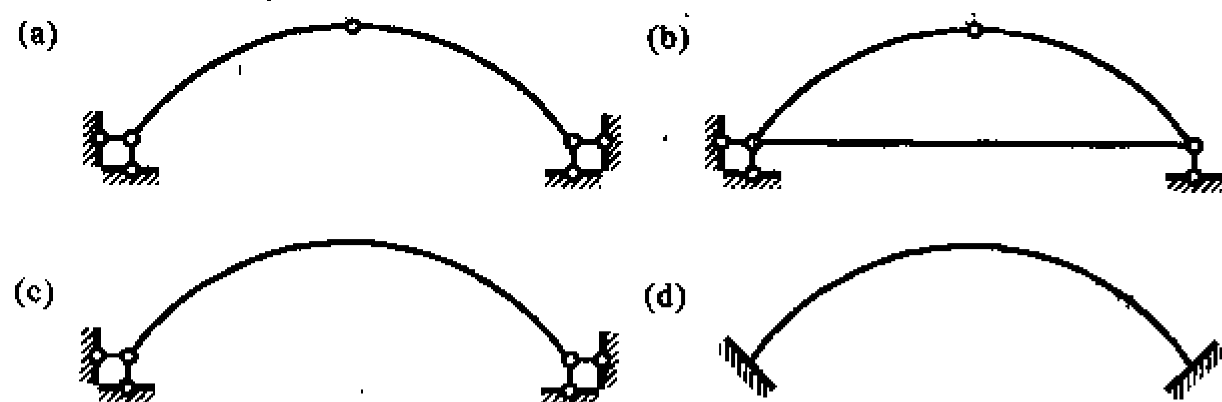


图 3-23

拱式结构的基本静力特征是：在竖向荷载作用下，拱的支座处将产生水平推力。所以，拱式结构也常称为推力结构。图 3-24a 所示为三铰拱受竖向荷载作用时支座反力的情况，由拱的右半部对铰 C 的力矩平衡条件$\sum M_C=0$ 可知，B 支座处除有竖向反力 F_{yB}外，还必须提供向内的推力 F_{xB}；而 A 支座处除有竖向反力 F_{yA}外，也存在向内的推力 F_{xA}，其大小应与 F_{xB}相同。图 3-24b 所示为与上述三铰拱形状相同的简支曲梁，在同样的竖向荷载作用下，曲梁的支座处并无水平反力产生。

由图 3-24 所示三铰拱和曲梁的整体平衡条件$\sum M_A=0$ 可知，两者的支座竖向反力 F_{yB}和 F_{yA}都是相同的，因此由竖向反力所产生的截面弯矩也必定相同，并且均使构件的内缘受拉。曲梁的截面弯矩实际上与相同跨度的简支梁相应截面上的弯矩相同；而三铰拱因支座处存在水平

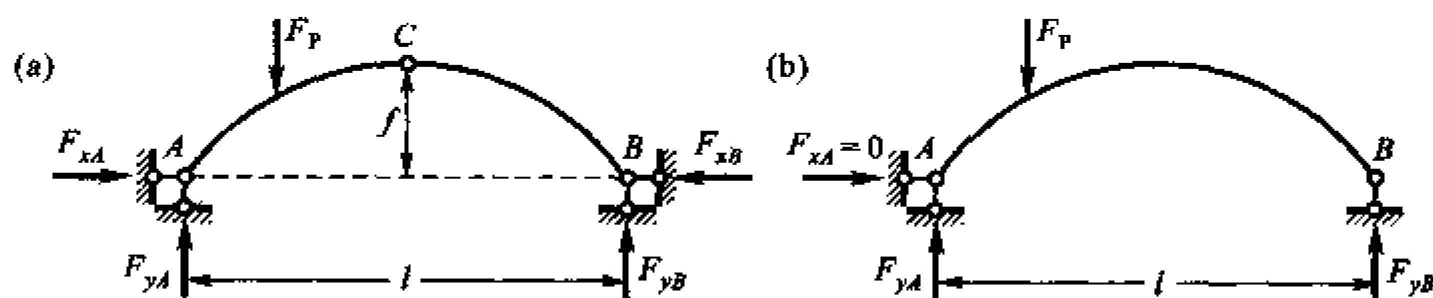


图　3-24

推力，它会产生使拱体外缘受拉的弯矩，使得合成后的截面弯矩比相应简支梁的弯矩小得多。两铰拱和无铰拱的受力情况也与三铰拱相类似，其共同特点是在竖向荷载作用下支座处存在水平推力，从而使拱体主要承受轴向压力，而截面弯矩则大为减小。

拱式结构的上述基本静力特征，决定了与梁相比用材节省，自重减轻，并且可有较大的跨度。由于拱体主要承受轴向压力，故可利用砖、石、混凝土等抗压性能好而又相对廉价的材料建造。从建筑学的角度，拱式结构有利于营造曲线美，并能提供较大的净空使用高度。拱式结构的缺点是需要支座提供较大的水平向推力。当支座处地基的水平抗力较弱时，只能采用带有水平拉杆的弓弦拱(图 3-23b)，此时支座水平推力将由拉杆提供，拱体的受力情况仍与一般三铰拱相同，但拉杆的设置可能影响净空使用高度。工程中也有采用连续拱的形式，使中间支座两边的水平推力相互抵消。因拱的外形较复杂、跨度常较大，施工要相对困难一些。

拱体各横截面形心的连线称为拱轴线。拱的两端与支座联结处称为拱趾，拱趾位于同一标高的拱称为平拱，位于不同标高的拱称为斜拱。拱轴的最高点称为拱顶，三铰拱的中间铰一般设在拱顶处。两拱趾的水平距离 l 称为跨度，由拱顶至两拱趾连线的竖向距离 f 称为拱高或矢高。拱高与跨度之比 f/l 称为拱的高跨比(矢跨比)，它对拱的内力有重要影响。在实际工程中，拱的高跨比通常在 1 至 1/10 之间。

3-3-1　三铰拱的内力计算

现以土建结构中最为常见的承受竖向荷载作用、且两拱趾位于同一水平线上的三铰拱(图 3-25a)为例，介绍三铰拱的受力分析方法和受力特性，并与相应的简支梁(图 3-25b)加以比较。

首先分析三铰拱的支座反力。三铰拱共有四个支座反力，可以利用三个整体平衡方程，再加上顶铰处弯矩为零的条件，即顶铰一侧隔离体力矩平衡方程惟一确定。

当仅有竖向荷载作用时，由整体平衡条件$\sum F_x=0$，可得

$$F_{xA}=F_{xB}=F_H$$

F_H 表示支座水平推力的数值。若两拱趾位于同一水平线上，支座水平推力沿支座连线作用。于是，利用整体平衡方程$\sum M_B=0$ 和$\sum M_A=0$ 即可直接解得两支座的竖向反力 F_{yA} 和 F_{yB}。可见，此时三铰拱支座竖向反力的计算与相应简支梁支座反力 F^0_{yA} 和 F^0_{yB} 的计算完全相同，即有

$$F_{yA}=F^0_{yA} \qquad (3-5)$$

$$F_{yB}=F^0_{yB} \qquad (3-6)$$

现记图 3-25b 简支梁相应三铰拱顶铰位置的 C 截面弯矩为 M^0_C，代表了 C 点一侧支座反力和

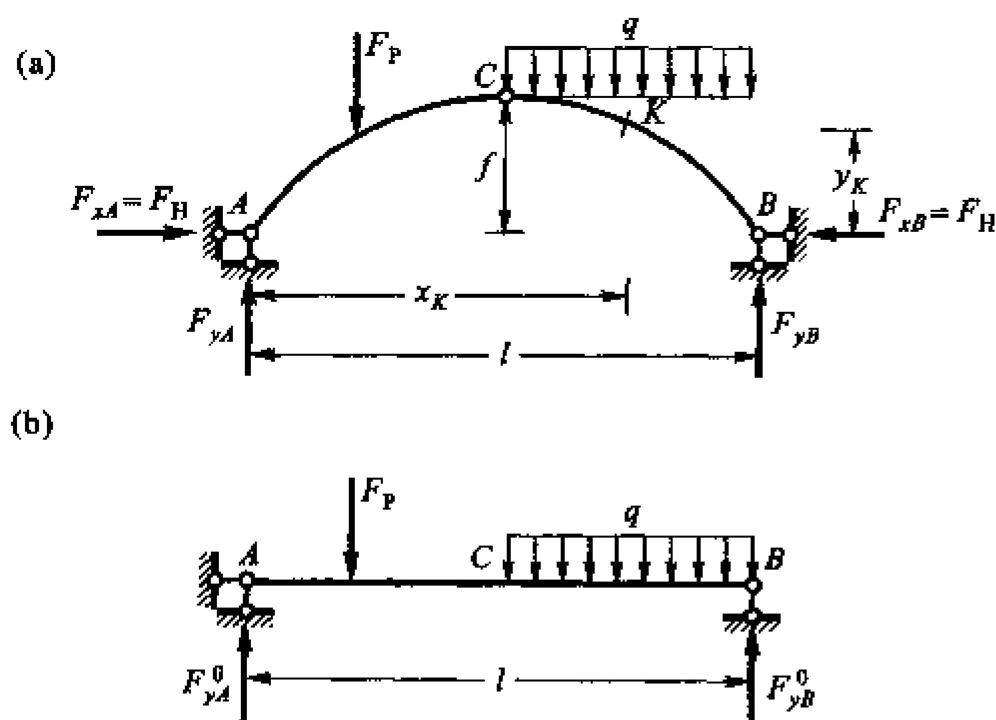


图 3-25

竖向荷载对 C 点力矩的代数和。由于图 3-25a 的三铰拱与上述简支梁的荷载和竖向反力均相同，所以当取拱顶铰 C 一侧为隔离体时，由 $\sum M_C=0$ 可得

$$M_C^0-F_H f=0$$

于是有

$$F_H=\frac{M_C^0}{f} \tag{3-7}$$

这就是三铰平拱在竖向荷载作用下支座水平推力的计算公式。

由以上的分析可知：

(1)在给定的荷载作用下，三铰拱的支座反力仅与三个铰的位置有关，而与拱轴的形状无关。

(2) 在竖向荷载的作用下，三铰平拱的支座竖向反力与相应简支梁反力相同，而水平推力 F_H 与拱高(矢高) f 成反比。拱的高跨比(矢跨比) $\frac{f}{l}$ 愈大则推力 F_H 愈小，反之，则推力 F_H 愈大。

以下来讨论三铰拱的内力计算。图 3-25a 所示三铰拱上任一截面 K 处的内力，可利用图 3-26 所示的隔离体平衡条件求得。拱体一般都是受压的，通常规定轴力以受压为正；而弯矩是以使拱体的内侧受拉为正，反之为负。在计算 K 截面的轴力 F_{NK} 和剪力 F_{QK} 时，可将 B 支座反力和作用于隔离体上的外荷载沿 K 点拱轴线的切线和法线方向进行分解，再分别由这两个方向上力的平衡条件求得截面上的轴力和剪力。K 截面的弯矩等于相应简支梁的截面弯矩 M_K^0，减去由支座水平推力引起的弯矩，即

$$M_K=M_K^0-F_H y_K \tag{3-8}$$

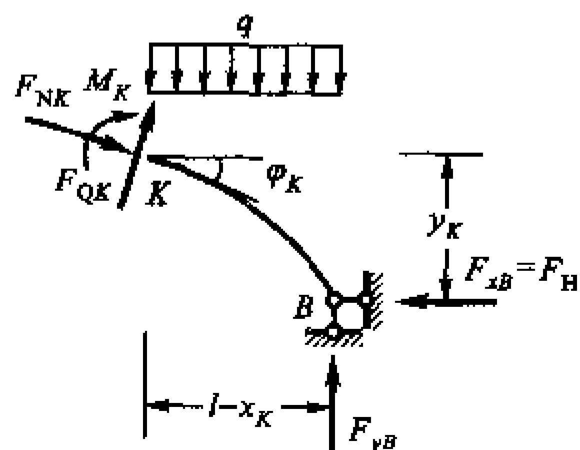


图 3-26

在作拱结构的内力图时，为方便起见，可以取拱的水平投

影线为基线进行绘制。

例3－6　试绘制图3－27a所示三铰拱的内力图。已知拱轴为一抛物线，当坐标原点设在支座A处时，拱轴线方程为

$$y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$$

解　支座的竖向反力与相应简支梁反力相同，即

$$F_{yA}=F_{yA}^0=28\ \text{kN},\quad F_{yB}=F_{yB}^0=20\ \text{kN}$$

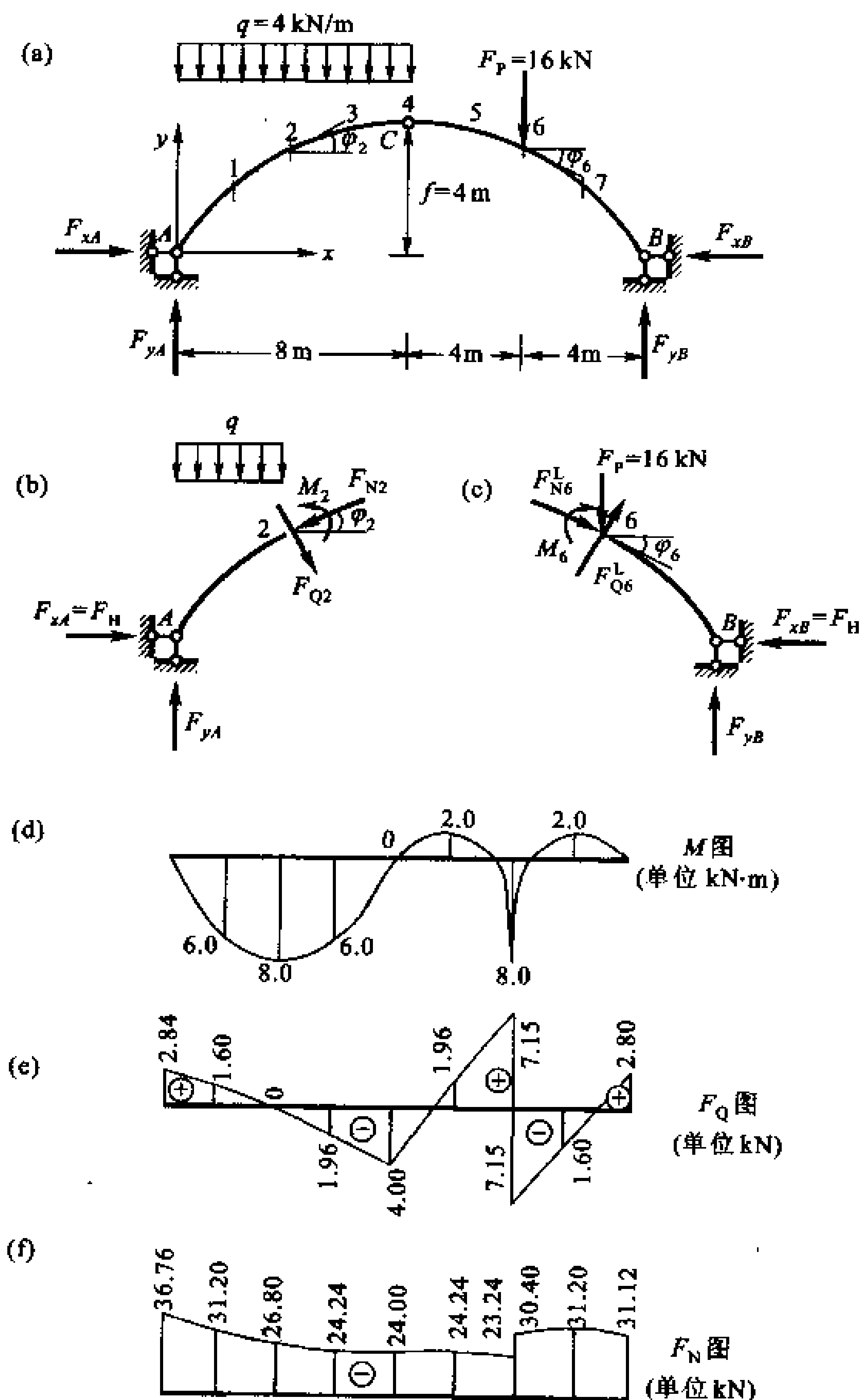


图　3－27

由式(3-7)可求得支座处的水平推力

$$F_H = \frac{M_C^0}{f} = 24\ \text{kN}$$

为绘制内力图,可将拱跨分成若干等分,然后列表求出各分点截面上的内力值。现如图将拱跨沿水平方向分成八等分,以分点2、6截面为例,说明内力计算方法。

分点2、6截面的横坐标分别为 $x_2 = 4\ \text{m}$, $x_6 = 12\ \text{m}$,由拱轴方程可得

$$y_2 = \frac{4f}{l^2}x_2(l - x_2) = 3\ \text{m},\quad \tan\varphi_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_2} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x_2) = 0.5$$

$$y_6 = \frac{4f}{l^2}x_6(l - x_6) = 3\ \text{m},\quad \tan\varphi_6 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_6} = \frac{4f}{l^2}(l - 2x_6) = -0.5$$

由此可知

$$\varphi_2 = 26°34',\quad \varphi_6 = -26°34'$$

分点2、6截面上的内力可采用隔离体方法(图3-27b、c)计算如下:

$$M_2 = M_2^0 - F_H y_2 = 80\ \text{kN·m} - 24\ \text{kN} \times 3\ \text{m} = 8\ \text{kN·m}$$

$$F_{Q2} = (F_{yA} - qx_2)\cos\varphi_2 - F_H\sin\varphi_2 = (28\ \text{kN} - 4\ \text{kN/m} \times 4\ \text{m}) \times 0.894 - 24\ \text{kN} \times 0.447 = 0\ \text{kN}$$

$$F_{N2} = (F_{yA} - qx_2)\sin\varphi_2 + F_H\cos\varphi_2 = (28\ \text{kN} - 4\ \text{kN/m} \times 4\ \text{m}) \times 0.447 + 24\ \text{kN} \times 0.894 = 26.8\ \text{kN}$$

分点6处因有集中荷载的作用,截面上的剪力和轴力均有突变,所以需分别求出分点左侧和右侧截面的剪力 F_{Q6}^L、F_{Q6}^R 和轴力 F_{N6}^L、F_{N6}^R 为

$$M_6 = M_6^0 - F_H y_6 = 80\ \text{kN·m} - 24\ \text{kN} \times 3\ \text{m} = 8\ \text{kN·m}$$

$$F_{Q6}^L = (F_P - F_{yB})\cos\varphi_6 - F_H\sin\varphi_6 = (16\ \text{kN} - 20\ \text{kN}) \times 0.894 - 24\ \text{kN} \times (-0.447) = 7.15\ \text{kN}$$

$$F_{Q6}^R = -F_{yB}\cos\varphi_6 - F_H\sin\varphi_6 = -20\ \text{kN} \times 0.894 - 24\ \text{kN} \times (-0.447) = -7.15\ \text{kN}$$

$$F_{N6}^L = (F_P - F_{yB})\sin\varphi_6 + F_H\cos\varphi_6 = (16\ \text{kN} - 20\ \text{kN}) \times (-0.447) + 24\ \text{kN} \times 0.894 = 23.24\ \text{kN}$$

$$F_{N6}^R = -F_{yB}\sin\varphi_6 + F_H\cos\varphi_6 = -20\ \text{kN} \times (-0.447) + 24\ \text{kN} \times 0.894 = 30.40\ \text{kN}$$

其余分点截面上的内力可按相同的方法计算。根据各分点计算结果可以画出三铰拱的弯矩图、剪力图和轴力图,分别如图3-27d、e、f所示。

由例3-6的分析不难看出,三铰拱的受力分析与一般静定刚架并无本质区别。三铰拱因有支座水平推力的存在,截面上的弯矩比相应简支梁要小得多。例如,例3-6三铰拱分点2、6截面的弯矩均为8 kN·m,而相应简支梁上述截面的弯矩值为80 kN·m。

3-3-2 三铰拱的压力线

图3-28a所示的三铰拱,在求得了支座反力以后,就可以作出图3-28b所示的力多边形。力多边形中的射线 F_{RA}、12、23 和 F_{RB} 分别代表了三铰拱相应区段上截面一侧所受合力的作用方向。根据在区段分界点处,两侧的合力作用线与分界点上所受外力作用线必定汇交于一点的平衡条件,可以作出索多边形 *ADEFB*,其中索线 *AD*、*DE*、*EF* 和 *FB* 分别表明了相应区段上截面一侧所受合力的作用线。对于拱来说,由于截面上轴力一般为压力,故称上述索多边形为拱的压力线。拱上任一截面 *K* 的形心至相应区段压力线的垂直距离 r_K,应等于截面弯矩与截面一侧合力大小的比值。r_K 愈大,则说明截面上弯矩愈大,这时拱轴的形状不够理想;反之,r_K 愈小,则说明截面上弯矩愈小,这时拱轴的形状比较理想。

压力线的概念在砖石和混凝土拱的设计中有重要意义。由于这些材料的抗拉强度较抗压强度低得多,通常要求截面上不出现拉应力。因此,压力线不应超出截面的核心区。若拱的截面为

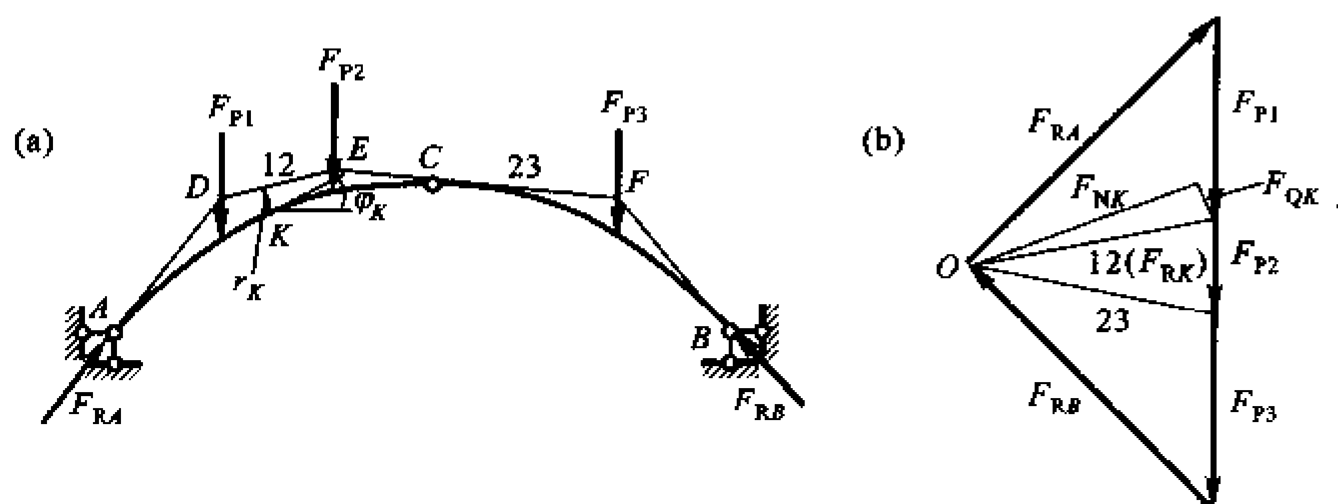


图 3-28

矩形，可由材料力学算得核心区高度为截面高度的 1/3，故压力线不应超出截面三等分的中段范围。

借助于压力线的概念，可以用图解的方法求出拱任一截面上的内力。设拟确定某一截面 K 的内力，可以过 K 点作出拱轴的切线和法线（图 3-28a），再将力多边形中代表 K 截面一侧所受合力的射线 12 沿 K 点的切线和法线方向分解为两个分力（图 3-28b），即得截面的轴力 F_{NK} 和剪力 F_{QK}。截面的弯矩则等于其一侧的合力 F_{RK} 对于 K 截面形心的力矩，即 $M_K = r_K F_{RK}$。

3-3-3 合理拱轴线

在给定的荷载作用下，能使拱体所有截面上弯矩为零的拱轴线称为合理拱轴线。对于受竖向荷载作用的平拱，由式(3-8)知

$$M_K = M_K^0 - F_H y_K$$

当为合理拱轴线时，按上述定义有

$$M = M^0 - F_H y = 0$$

由此得到合理拱轴线的方程为

$$y = \frac{M^0}{F_H} \tag{3-9}$$

这说明对于竖向荷载作用下的三铰平拱，合理拱轴线的竖标 y 应等于相应简支梁弯矩 M^0 与支座推力 F_H 的比值。因为当三个拱铰的位置给定后，三铰拱的支座推力 F_H 便确定了，所以只要求出相应简支梁的弯矩方程，除以 F_H 即可求得三铰拱合理拱轴线的方程。

例 3-7 试求出图 3-29a 所示对称三铰拱在竖向均布荷载 q 作用下的合理轴线。

解 该三铰拱相应简支梁（图 3-29b）的弯矩方程为

$$M^0 = \frac{1}{2} qx(l-x)$$

支座推力 F_H 可由式(3-7)求得，即

$$F_H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{ql^2}{8f}$$

故由式(3-9)得三铰拱的合理轴线方程为

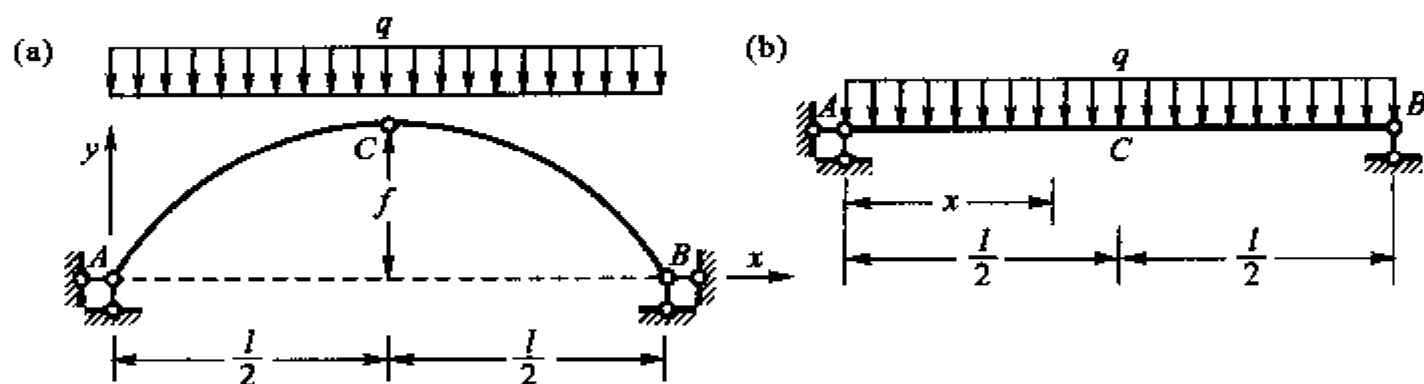


图 3-29

$$y=\frac{M^0}{F_H}=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$$

由此可见,在竖向均布荷载作用下,三铰拱的合理轴线是二次抛物线。

例 3-8 试求出图 3-30 所示对称三铰拱在填土重量作用下的合理轴线。设填土的容重为 γ,其竖向分布荷载可表达为 $q(x)=q_C+\gamma y$。

解 本问题的特点是分布荷载集度本身与拱轴形状有关。这样,M^0 无法事先求得,所以不能直接套用式(3-9)求得拱的合理轴线。为此将式(3-9)对 x 微分两次,并注意到当 q 以向下为正时,$\frac{d^2M^0}{dx^2}=-q$,从而得到关于合理轴线的微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{q(x)}{F_H}$$

因本例中为计算方便将坐标原点取在拱顶处,并取 y 轴方向向下,故上式右边应改取正号,即

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q(x)}{F_H}$$

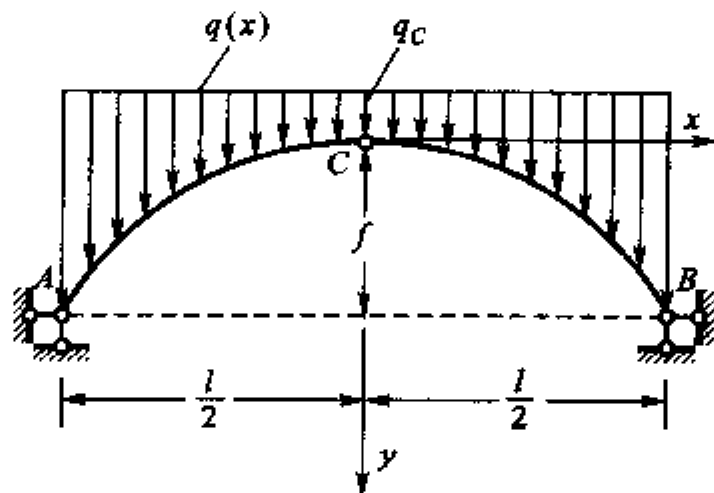


图 3-30

将分布荷载集度 $q(x)=q_C+\gamma y$ 代入上式,得

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{\gamma}{F_H}y=\frac{q_C}{F_H}$$

解此微分方程得

$$y=A\cosh\sqrt{\frac{\gamma}{F_H}}x+B\sinh\sqrt{\frac{\gamma}{F_H}}x-\frac{q_C}{\gamma}$$

其中常数 A 和 B 可由边界条件确定如下:

当 $x=0$ 时,$y=0$,得

$$A=\frac{q_C}{\gamma}$$

当 $x=0$ 时,$\frac{dy}{dx}=0$,得

$$B=0$$

于是,有

$$y=\frac{q_C}{\gamma}\left(\cosh\sqrt{\frac{\gamma}{F_H}}x-1\right)$$

以上分析表明,在填土重量作用下,三铰拱的合理轴线是一条悬链线。

例 3-9 试证明圆弧线是三铰拱受拱轴线法线方向均布压力作用下的合理轴线。

证 沿拱轴线法线方向的均布压力可由流体的压力产生。证明时可先考虑半圆形三铰拱(图 3-31a)的情况。作用于圆弧上的径向均布荷载 q 可以用两个垂直方向上等值的均布荷载等效替代(图 3-31b)。这因为如

图3－31c所示，作用于任一微段 ds 上的径向力为 $qR\mathrm{d}\varphi$，其竖向和水平分力分别为 $\mathrm{d}F_x = qR\mathrm{d}\varphi\cos\varphi$ 和 $\mathrm{d}F_y = qR\mathrm{d}\varphi\sin\varphi$，恰好就等于沿竖向和水平方向的两种均布荷载 q 作用于微段时产生的竖向和水平力。

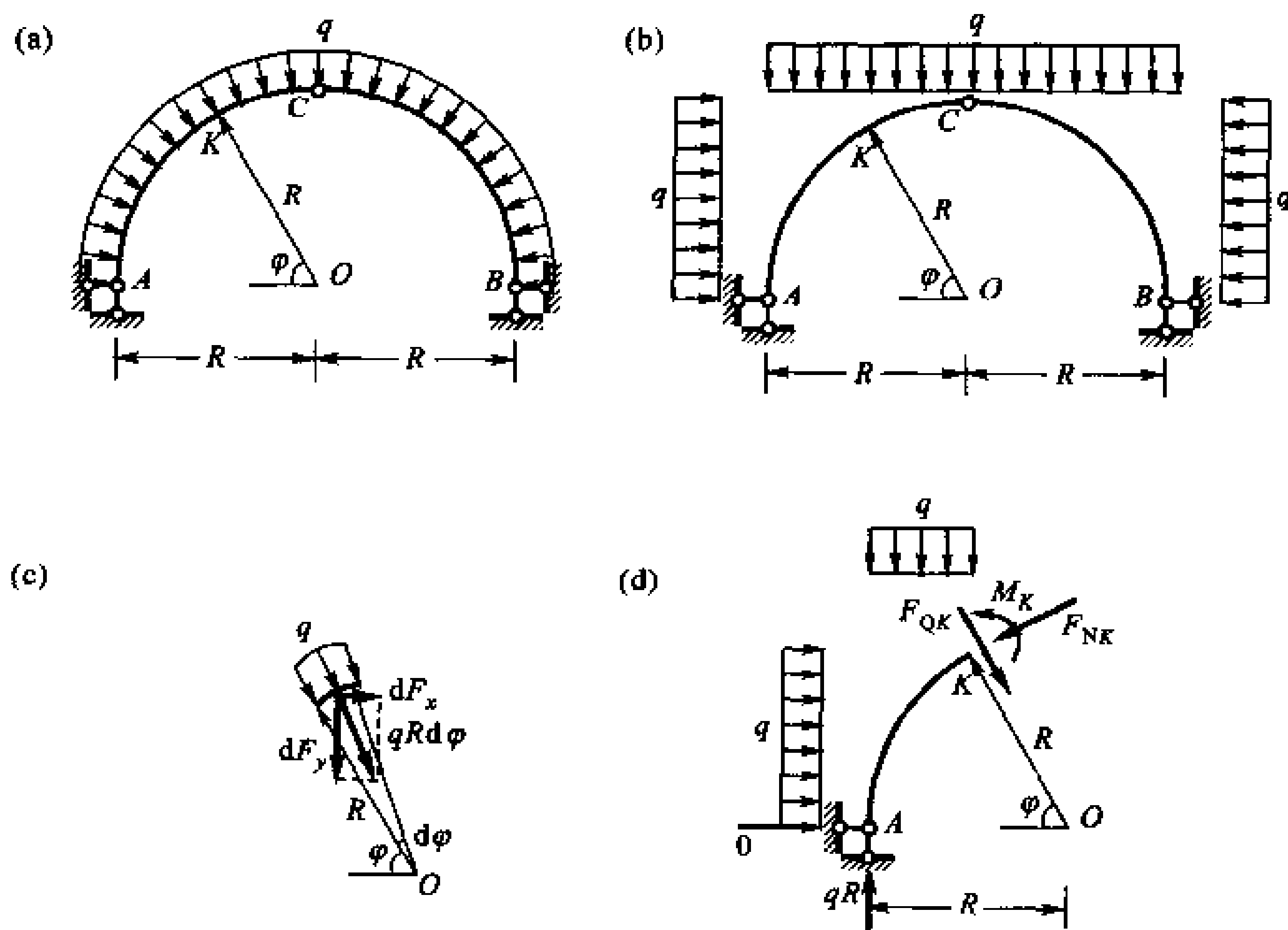


图　3－31

按照图3－31b易求得拱两支座的竖向反力均为 qR，而水平推力为零。由图3－31d的隔离体平衡条件，并注意到关系式 $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$，可得拱轴线上任意截面 K 处的弯矩

$$M_K = qR(R - R\cos\varphi) - \frac{qR^2\sin^2\varphi}{2} - \frac{q(R - R\cos\varphi)^2}{2} = 0$$

可见，此时圆弧线是合理拱轴线。

既然拱轴线为半圆时所有截面上无弯矩存在，可以想象在拱轴线上的任意位置插入两个铰后形成的体系依然可保持平衡，这样就可将所插入的两铰视为一圆弧线三铰拱的支座。这就证明了任意圆弧线是三铰拱承受沿拱轴线法向均布压力作用下的合理轴线。

由以上的分析可知，在不同的荷载作用之下三铰拱的合理轴线是不同的。实际工程中一般可将主要荷载作用下的合理轴线，结合结构构造方面的要求来确定拱轴线的形状，达到在实际荷载情况下拱内的弯矩较小的目的。对于非竖向荷载作用或非平拱的情况，一般不能套用式(3－9)，此时可以直接由合理拱轴线的定义确定其数学表达式。

对于三铰拱的合理轴线，可以用索比拟的方法加以形象化地理解。设想两定点之间有一自重可忽略的悬索，若将作用于拱上的荷载施加于该索上，则所得悬索的形状曲线倒置后就是三铰拱的合理轴线的形状。因为索的特点是所有截面上只受轴线方向的拉力，当荷载反向作用时，以其形状曲线为轴线的拱所有截面上便只有轴向压力作用。

当拱轴线为合理轴线时，拱的压力线就必定与拱的轴线重合。

§3-4 静定平面桁架

实际桁架是指由若干直杆构成、且所有杆件的两端均用铰联结时即可构成几何不变体系，并且杆件主要承受轴力的结构。桁架是土木工程中广泛采用的结构形式之一，例如，工业与民用房屋的屋架(图 3-32a、b)，格构式电视塔、输电塔和起重机塔架(图 3-33)，铁路和公路的桁桥(图 3-34)等。若上述铰结体系无多余约束存在，则称为静定桁架；有多余约束时称为超静定桁架。当桁架各杆的轴线以及外力的作用线都在同一平面内时，称为平面桁架；不在同一平面内时称为空间桁架。

实际桁架在分析时常需简化为理想桁架。所谓理想桁架应符合以下三项假设：

(1) 各杆在两端用理想铰(光滑而无摩擦)相互联结。

(2) 各杆的轴线均为直线，并通过铰的几何中心。

(3) 荷载和支座反力均作用在结点上。

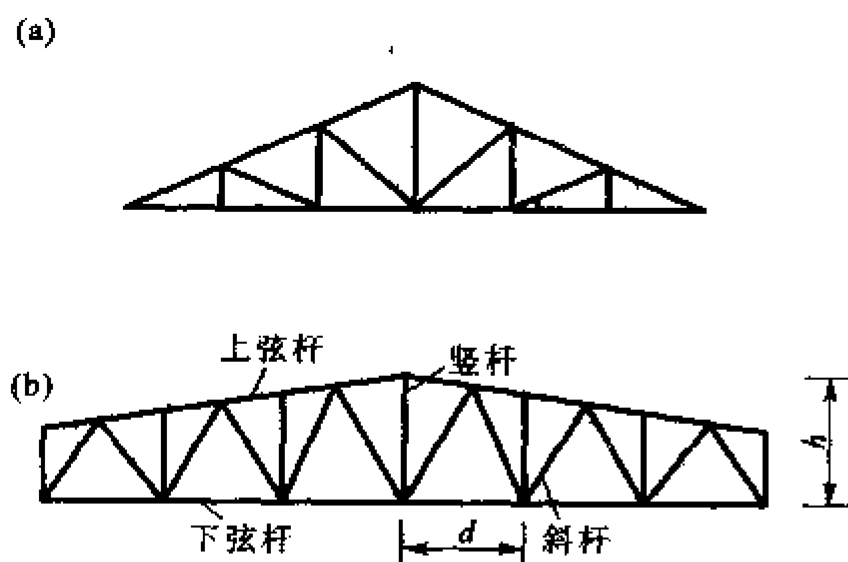


图 3-32

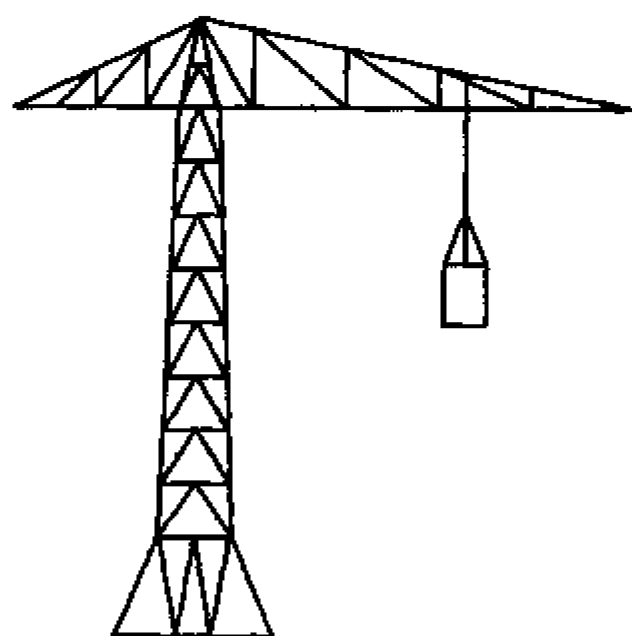


图 3-33

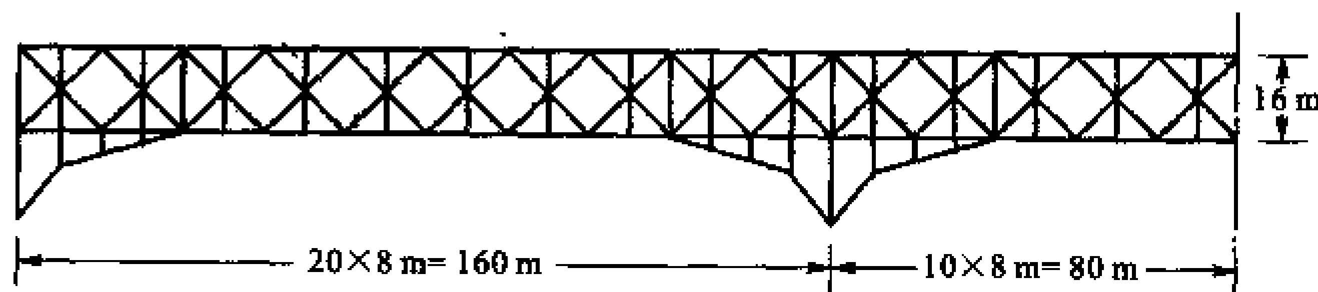


图 3-34

理想桁架的各杆件只承受轴向力，常称为二力杆。由材料力学可知，在轴心受拉或受压杆件中，截面上的应力是均匀分布的，此时材料的效用可以得到充分的发挥。所以与梁或刚架相比，桁架的材料应用较为经济，自重较轻，并能跨越更大的跨度。

实际的桁架一般不完全符合上述理想情况。例如，钢桁架中的杆件常通过与结点板焊接、铆接或栓接相互联结，混凝土屋架各杆是连续浇筑或装配整体浇筑而成的，其结点均具有一定的刚

性，各杆之间的角度几乎不能变动；在结点处桁架各杆件的轴线有时不完全交于一点，存在一定偏差；杆件的自重以及作用到杆件上的风荷载等并非作用在桁架的结点上等。但实际工程中桁架的各杆件一般比较细长，仍以承受轴力为主，在计算杆件轴力时可以采用理想桁架的计算简图。在工程设计中，通常是将按桁架的理想情况算得的杆件轴力称为主内力，与此相应的正应力则称为主应力；将由于理想情况不能完全实现而产生的附加内力称为次内力（其中主要是次弯矩），由次内力产生的应力称为次应力。本节中只限于讨论桁架主内力的计算。桁架的次内力一般较小而可以忽略，必要时可以根据杆件受力和结构构造方面的特点，按简化模型计算。在设计和施工中，一般应避免桁架产生较大的次内力。

桁架的杆件，按其所在位置的不同，可以分为弦杆和腹杆两大类。弦杆是组成水平桁架上、下边缘的杆件，分为上弦杆和下弦杆；腹杆是在上、下弦杆之间的联系杆件，包括斜杆和竖杆（图3-32b）。弦杆上两相邻结点之间的水平距离 d 称为结间长度，两支座间的水平距离称为跨度，上、下弦杆上结点之间的最大竖向距离 h 称为桁高。

按照几何构造方面的特点，静定平面桁架可以分为以下三类：

(1) 简单桁架——由基础或一个基本铰结三角形开始，依次增加二元体所构成的桁架（图3-35a）。

(2) 联合桁架——由几个简单桁架，按照几何不变体系的基本组成规则联成的桁架（图3-35b、c）。

(3) 复杂桁架——不是按上述两种方式组成的其他桁架（图3-35d）。

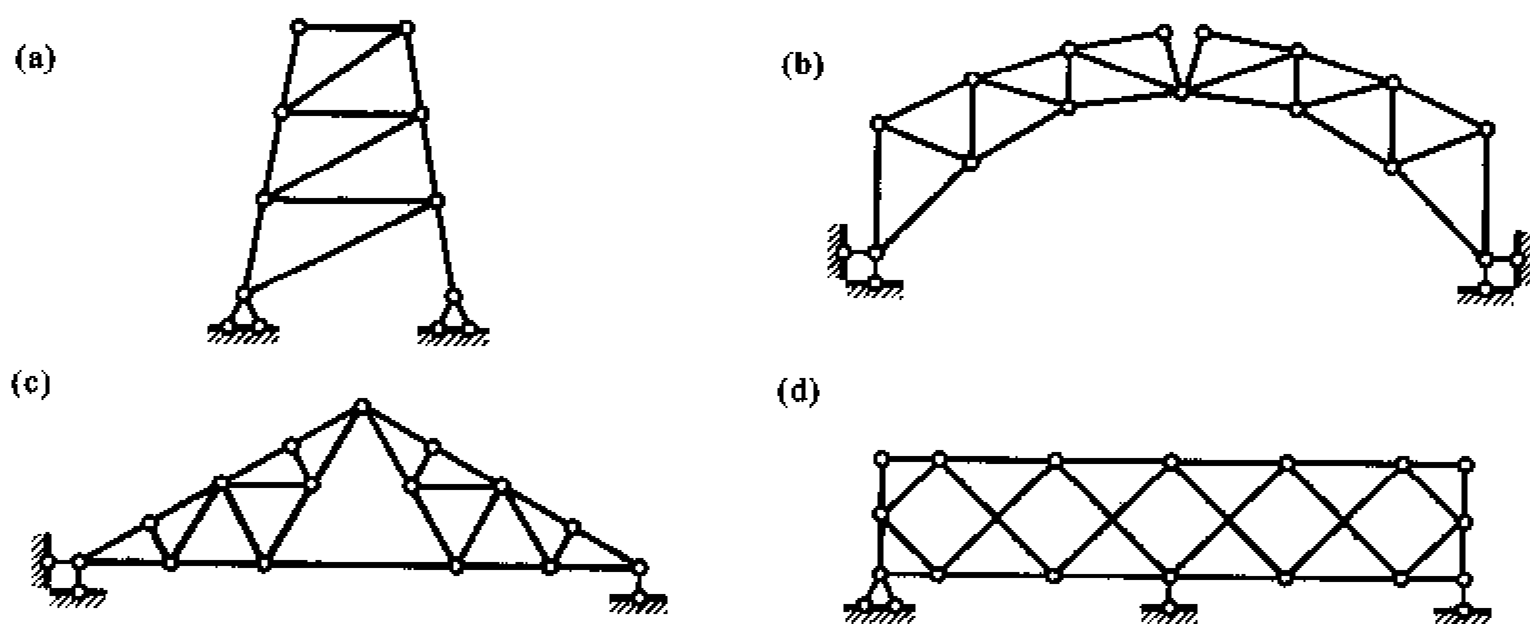


图 3-35

此外，桁架可按其外形分为平行弦桁架、折弦桁架、三角形桁架和梯形桁架（图3-36a、b、c和d）；或者按支座处有无推力分为梁式桁架（图3-36）和拱式桁架（图3-35b）等。

桁架杆件的内力规定以受拉为正。在计算时可以假定杆件的未知轴力为拉力，若所得结果为负，则为压力。在计算桁架杆件的内力时，可以按需要截取桁架中的一部分作为隔离体，由隔离体的平衡条件求出杆件的未知轴力。如果截取的隔离体只包含一个结点，就称为结点法；如果截取的隔离体包含两个以上的结点，就称为截面法。

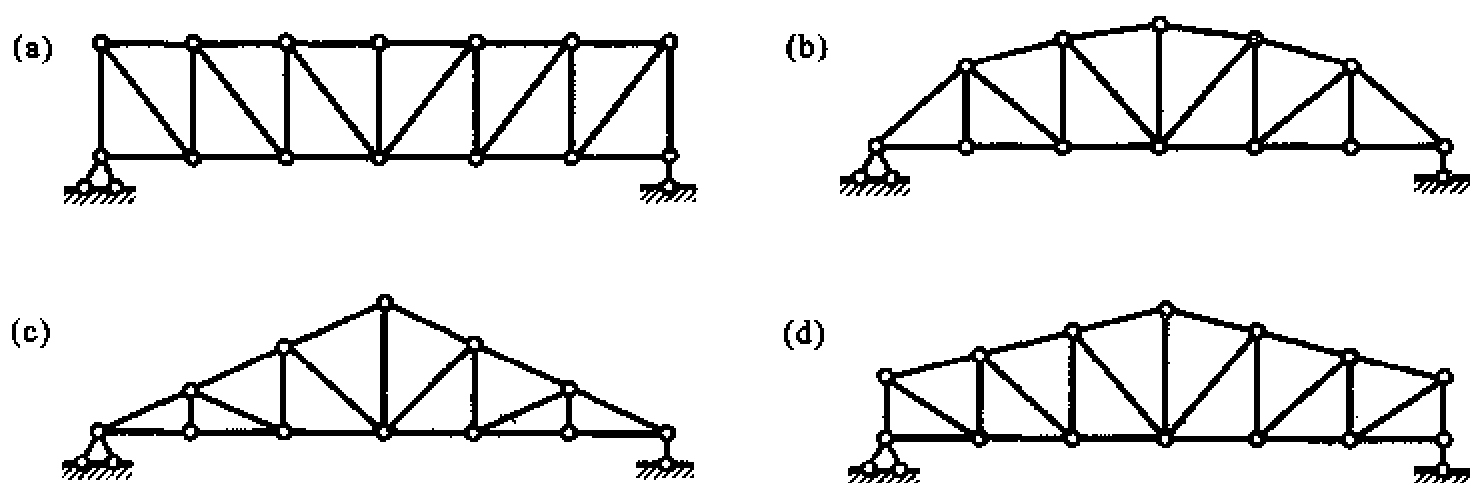


图 3-36

3-4-1 结点法

结点法是截取桁架的结点为隔离体求解桁架杆件内力的方法。作用于平面桁架任一结点的各力(包括荷载、支座反力和杆件轴力)组成一平面汇交力系,就每一个结点可以列出两个平衡方程,对于有 n 个结点的平面桁架可以列出 $2n$ 个平衡方程,其数量恰好等于静定平面桁架的链杆(包括支座链杆)约束数目。因此,从原则上讲,联立求解上述 $2n$ 个平衡方程,就可以求得桁架所有杆件的轴力和支座反力。

为了避免解联立方程,可从未知力不超过两个的结点开始,依次进行。例如,在计算图 3-37a 所示的桁架时,可以先根据桁架的整体平衡条件求得如图所示的支座反力,此时桁架结点 1 处只有两个未知力。取结点 1 为隔离体(图 3-37b),由平衡条件 $\sum F_y=0$ 可求得 13 杆的轴力 $F_{N13}=-100$ kN,再由 $\sum F_x=0$ 求得 12 杆的轴力 $F_{N12}=60$ kN。求得 F_{N12} 之后,结点 2 处仅余两个未知力,取结点 2 为隔离体(图 3-37c),由平衡条件可求得 $F_{N24}=60$ kN,$F_{N23}=80$ kN。再取结点 3 为隔离体(图 3-37d),可求得 $F_{N34}=0$,$F_{N35}=-60$ kN,以此类推。

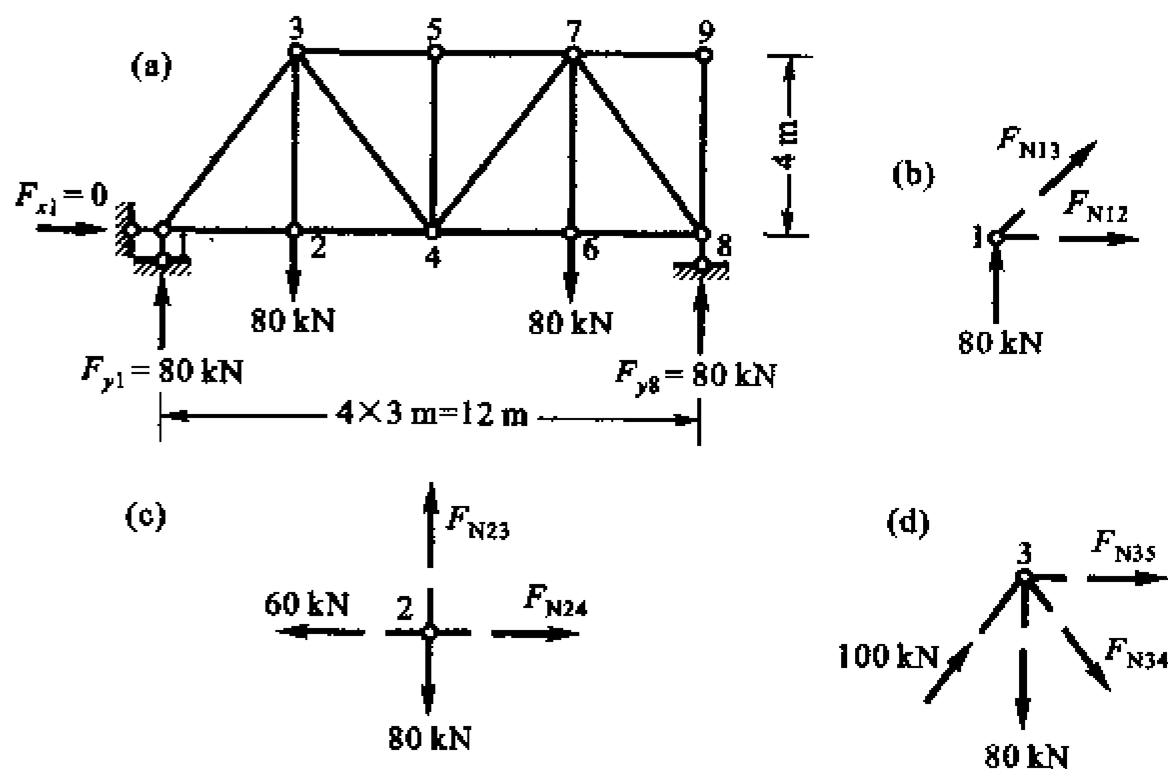


图 3-37

因为简单桁架是由一个基本铰结三角形(或基础)开始依次增加二元体所构成的,所以在采用结点法求解时,总可以按照上述增加或去除二元体的顺序求出所有杆件的内力。

在应用结点法时,利用结点平衡的某些特殊情况,常可以判定桁架中某些杆件的轴力为零,称作为零杆;或者可以判定与某一结点相联的两杆内力数值相等,从而使计算得以简化。这几种特殊情况是:

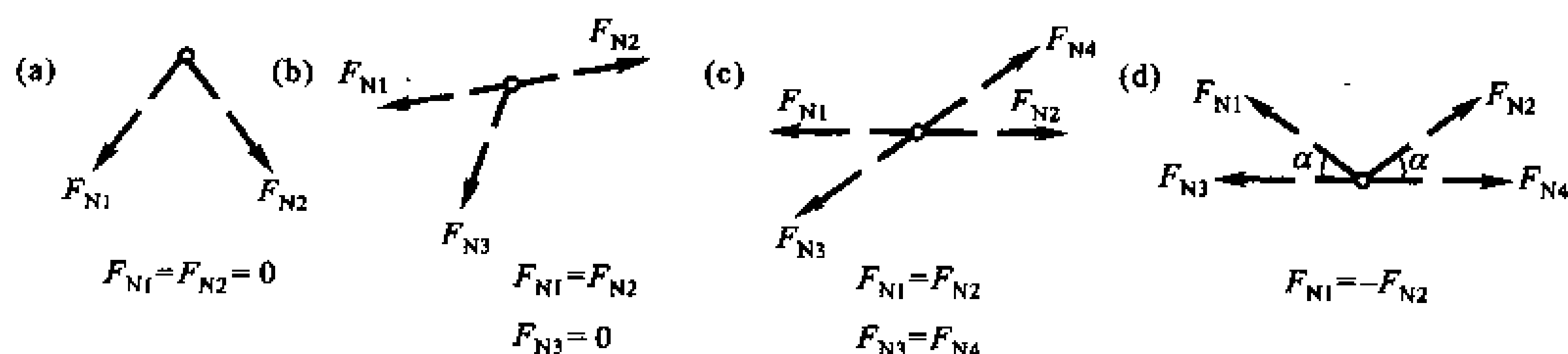


图 3-38

(1) 两杆结点上无外力作用时(图 3-38a),则两杆均为零杆。

(2) 两杆在一直线上的三杆结点上无外力作用时(图 3-38b),则侧杆为零杆,而在同一直线上的两杆的轴力必定相等,且性质(指受拉或受压)相同。

(3) 直线交叉形四杆结点上无外力作用时(图 3-38c),则在同一直线上两杆的轴力相等,且性质相同。

(4) 侧杆倾角相等的 K 形结点上无外力作用时(图 3-38d),则两侧杆的轴力相等,且性质相反。

对于图 3-37a 所示的桁架,结点 9 符合上述情况(1),因而有 $F_{N79}=0$,$F_{N89}=0$;结点 5 符合情况(2),因而有 $F_{N45}=0$;结点 2、6 的情况类似于情况(3),有 $F_{N23}=F_{N67}=80\ \text{kN}$。

若桁架处于对称或反对称的受力状态,在分析时只需计算半边桁架杆件的内力,另外半边杆件的内力可以根据对称或反对称的性质得到。此外,利用受力状态对称或反对称的特点也常可使计算进一步简化。例如,图 3-37 所示的桁架在撤去零杆 79 和 89 之后即属于对称受力状态,这就要求杆 43 与 47 的轴力大小相等,且性质相同。但因杆 45 是零杆,结点 4 符合上述情况(4),它要求两斜杆的轴力性质相反。由于上述两种结论是矛盾的,因而可以判定 $F_{N43}=F_{N47}=0$。如果结点 4 上也作用有竖向荷载(图 3-39a),则可以利用两斜杆内力相等的特点,由结点 4

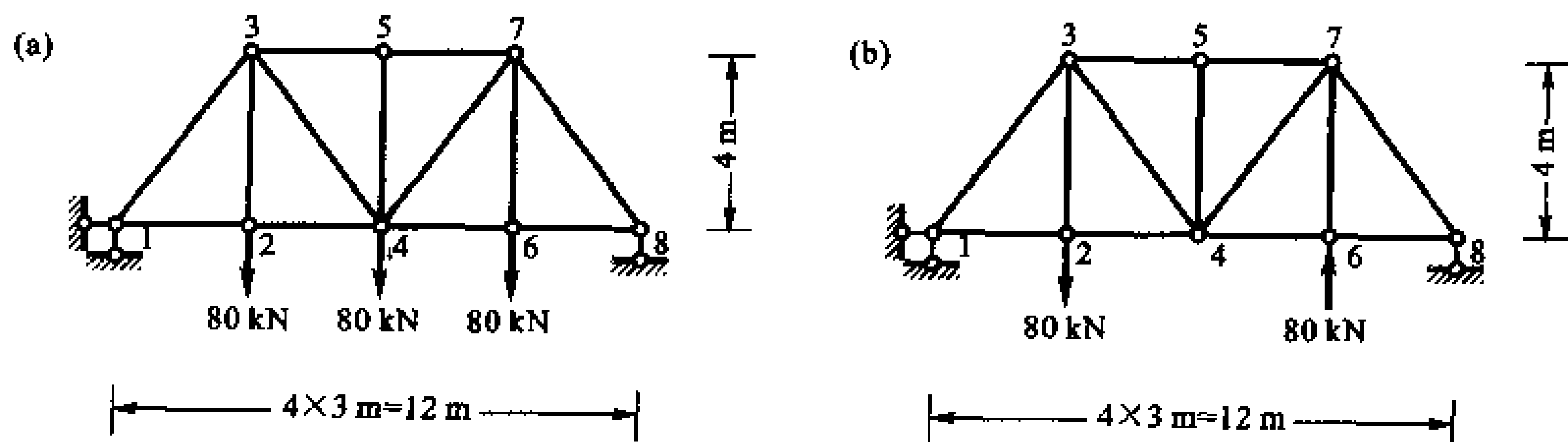


图 3-39

的平衡条件$\sum F_y=0$求出两杆的轴力 $F_{N43}=F_{N47}=50$ kN；如果将作用于结点6上的荷载改为竖直向上，且大小不变(图3-39b)，则桁架处于反对称的受力状态，应有 $F_{N35}=-F_{N57}$，结合结点平衡的特殊情况(2)，就可判定 $F_{N35}=F_{N57}=0$。

例3-10　试用结点法求图3-40a所示桁架各杆的轴力。

解　首先求出支座反力如图3-40a所示。因桁架的每一个结点上至少有三根杆件与之相联，直接运用结点法就需求解联立方程。为简化计算，可根据该桁架内部对称的特点，将荷载和支座反力分解为对称(图3-40b)和反对称(图3-40c)两种情况。

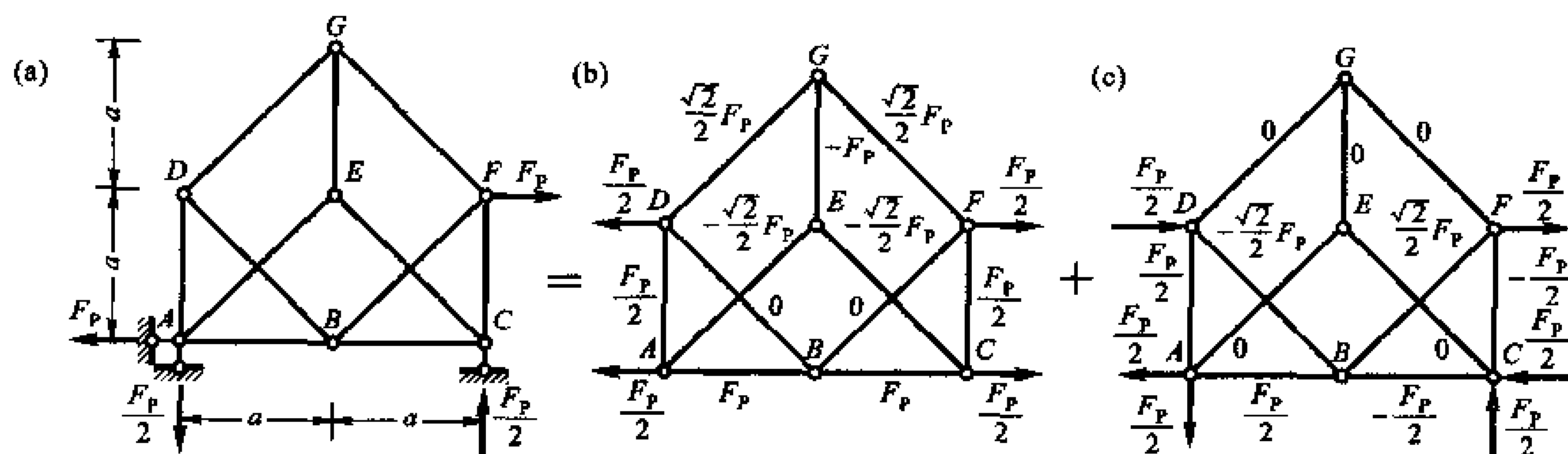


图　3-40

在图3-40b的对称外力作用下，考虑到铰 B 属于侧杆倾角相同的K形结点，可判定杆 BD 和 BF 都是零杆，于是结点 D、F 处的未知力仅剩两个。取结点 D 为隔离体(图3-41a)，由$\sum F_x=0$得

$$F_{NDG}\cos 45^\circ=\frac{F_P}{2},\quad F_{NDG}=\frac{\sqrt{2}}{2}F_P$$

再由$\sum F_y=0$得

$$F_{NDA}=F_{NDG}\sin 45^\circ=\frac{F_P}{2}$$

然后可取结点 A 为隔离体(图3-41b)，由$\sum F_y=0$得

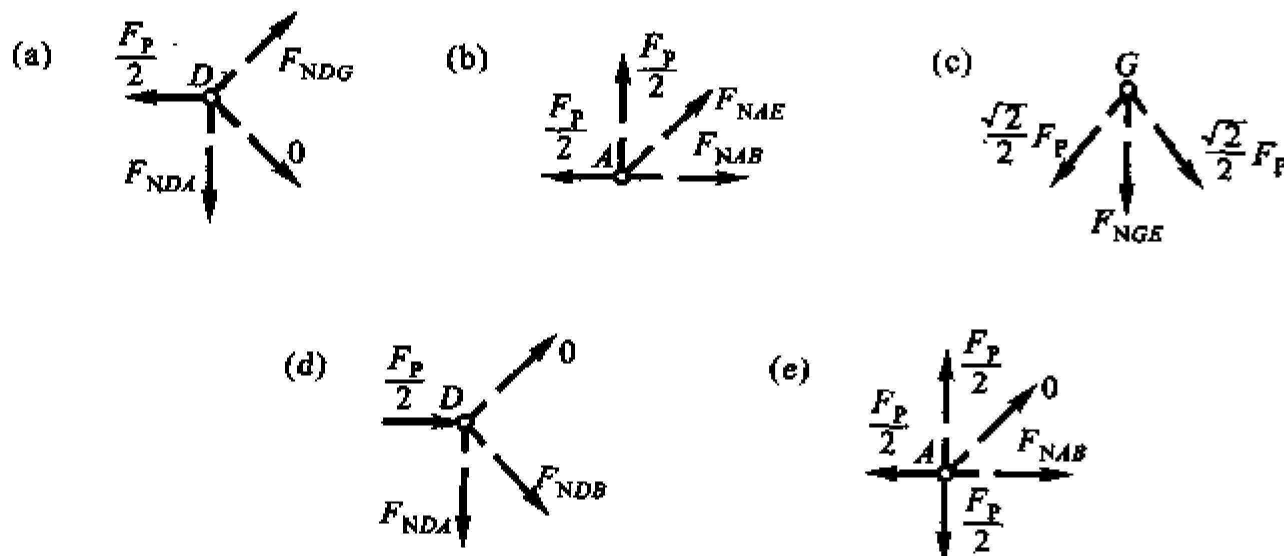


图　3-41

$$F_{NAE}\sin 45^\circ+\frac{F_P}{2}=0,\quad F_{NAE}=-\frac{\sqrt{2}}{2}F_P(\text{压力})$$

再由$\sum F_x=0$得

$$F_{NAB}+F_{NAE}\cos 45^\circ-\frac{F_P}{2}=0,\quad F_{NAB}=F_P$$

最后取结点 G 为隔离体(图 3-41c),由$\sum F_y=0$得

$$F_{NGE}=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}F_P\sin 45^\circ=-F_P(\text{压力})$$

于是,可按照内力对称的原则标出桁架各杆的内力,如图 3-40b 所示。

在图 3-40c 的反对称外力作用下,根据桁架内力也应该反对称的特点,可以判定 EG 杆的轴力(属对称内力)必定为零,然后可进一步判定杆件 AE、CE、DG 和 FG 均为零杆。依次取结点 D 和 A 为隔离体(图 3-41d、e),由结点平衡条件得

$$F_{NDB}=-\frac{\sqrt{2}}{2}F_P,\quad F_{NDA}=\frac{F_P}{2},\quad F_{NAB}=\frac{F_P}{2}$$

于是,可按照内力反对称的原则标出桁架各杆的内力,如图 3-40c 所示。

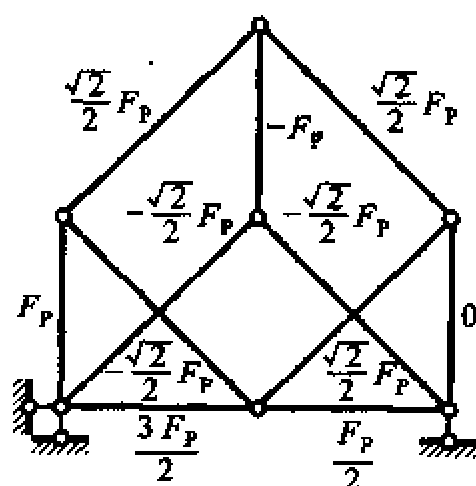


图 3-42

将图 3-40b、c 相应杆件的内力叠加,即可得到原桁架的最终内力,如图 3-42 所示。

3-4-2 截面法

在桁架分析中,有时仅需或者是先需求出某一(或某些)指定杆件的内力,这时一般用截面法比较方便。截面法是用适当的截面,截取桁架中包含两个以上结点的部分为隔离体。此时,作用在隔离体上的各力通常构成平面一般力系,可以建立三个平衡方程。因此,只要隔离体上的未知力不超过三个,一般都可以利用这三个平衡方程解得。例如,图 3-43a 所示桁架的反力易求得,但每一个结点上均有三根杆件的轴力是未知的,所以无法单独从一个结点突破求解。分析其组成,桁架是由两个基本铰结三角形 ABC 和 DEF 用三根链杆相联构成的,现用截面法截断上述三根链杆,取铰结三角形 DEF 为隔离体(图 3-43b),利用平面一般力系的三个平衡方程,可以求出 AD、BE 和 CF 三杆的轴力。此后,便可应用结点法求出其余杆件的轴力。

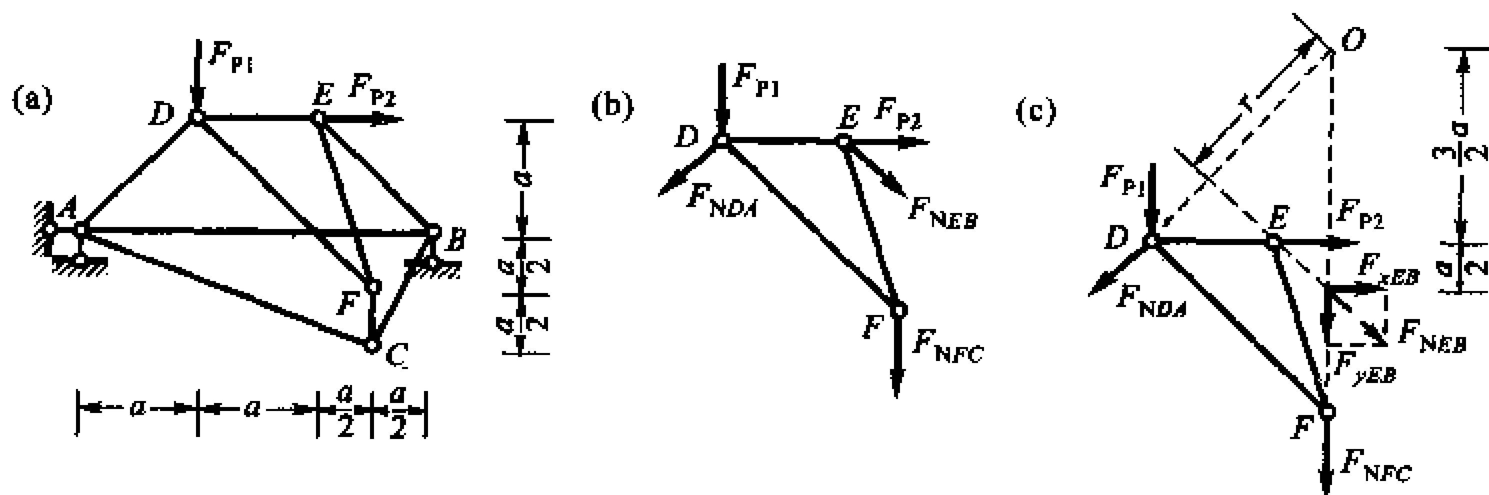


图 3-43

为简化内力计算,在应用截面法分析静定桁架时应注意以下两点:

(1) 选择恰当的截面和适宜的平衡方程,尽量避免方程的联立求解。

(2) 利用刚体力学中力可沿其作用线移动的特点，按照解题需要可将杆件的未知轴力移至恰当的位置进行分解，以简化计算。

对于图 3-43b 所示的隔离体，若采用$\sum F_x=0,\sum F_y=0,\sum M=0$三个平衡方程，一般需要联立求解三杆的未知轴力，计算麻烦；但若分别对其中两杆延线的交点取力矩平衡方程，则每一个方程中只含有一个未知轴力，可以方便地求解。例如，在计算 BE 杆的轴力时，可以对 AD、CF 两杆延长线交点O(图 3-43c)取矩。但此时未知力 F_{NEB}对 O 点的力臂 r 计算比较麻烦。为此可如图将 F_{NEB} 在 BE 杆与 CF 杆延长线交点处沿水平和竖直方向进行分解，其竖向分量 F_{yEB}对 O 点无力矩产生，而水平分量 F_{xEB}对 O 点的力臂容易按照几何关系确定为 $2a$。由隔离体力矩平衡方程$\sum M_O=0$可得

$$F_{P1}\times\frac{3}{2}a+F_{P2}\times\frac{3}{2}a+F_{xEB}\times 2a=0,\quad F_{xEB}=-\frac{3}{4}(F_{P1}+F_{P2})$$

然后再根据几何关系求得

$$F_{NEB}=-\frac{3\sqrt{2}}{4}(F_{P1}+F_{P2})$$

其中负号表示 BE 杆为受压。

例 3-11 试求图 3-44a 所示桁架中 a、b 和 c 三杆的内力。

解 先求出桁架的支座反力，为

$$F_{yA}=80\ \text{kN},\quad F_{yB}=40\ \text{kN}$$

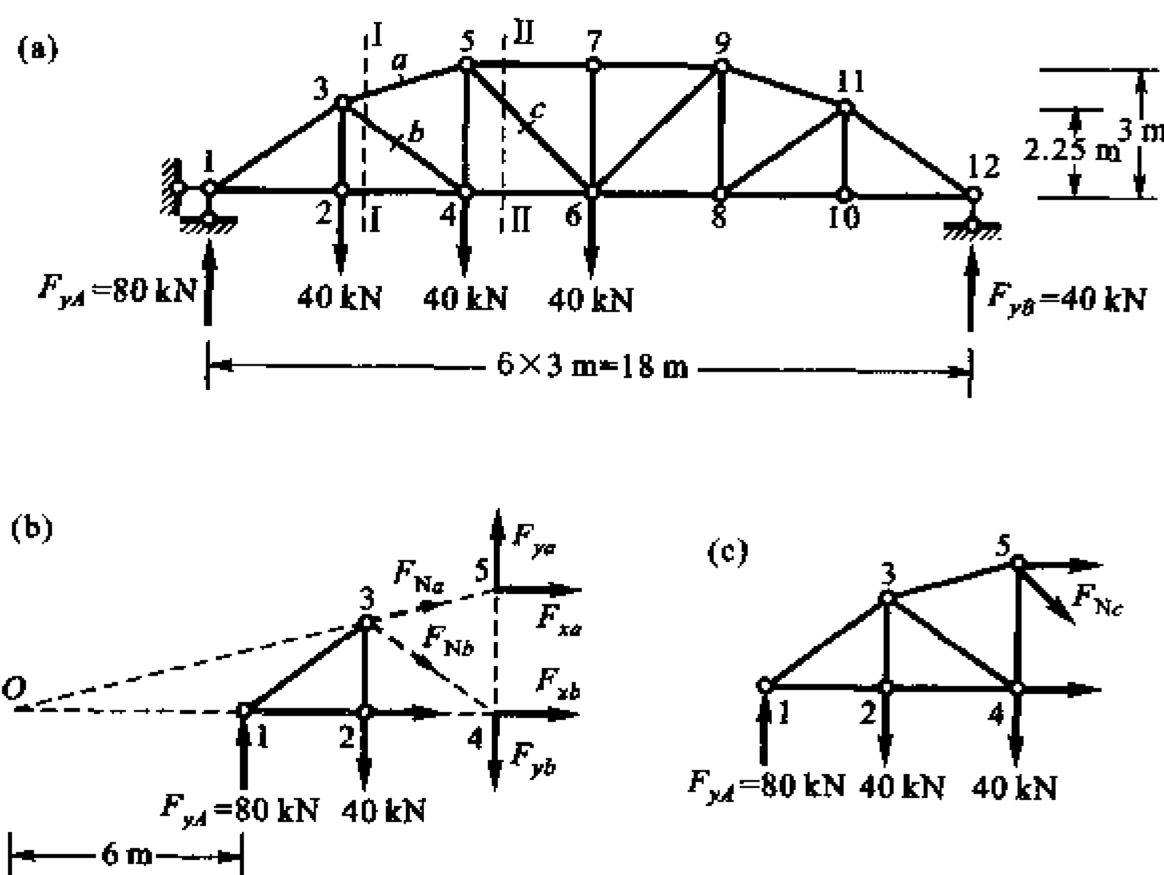


图 3-44

为求杆 a 和 b 的内力，作截面Ⅰ－Ⅰ并取左边部分为隔离体(图 3-44b)。求杆 a 的内力 F_{Na}时，取杆 b 与杆 24 的交点 4 为矩心，并将 F_{Na} 在结点 5 处分解为水平和竖直方向两个分力 F_{xa} 和 F_{ya}，由力矩平衡方程

$$\sum M_4=80\ \text{kN}\times 6\ \text{m}-40\ \text{kN}\times 3\ \text{m}+F_{xa}\times 3\ \text{m}=0$$

得

$$F_{xa} = -120\ \text{kN}$$

再由 F_{Na} 与 F_{xa} 之间的比例关系，求得

$$F_{Na} = -123.69\ \text{kN}\ (\text{压力})$$

求杆 b 的内力 F_{Nb} 时，取杆 a 与杆 24 的交点 O 为矩心。先由几何关系确定 O 点的位置如图所示，并将 F_{Nb} 在结点 4 分解(图 3－44b)，由力矩平衡方程

$$\sum M_O = -80\ \text{kN}\times 6\ \text{m} + 40\ \text{kN}\times 9\ \text{m} + F_{yb}\times 12\ \text{m} = 0$$

得

$$F_{yb} = 10\ \text{kN}$$

故

$$F_{Nb} = 16.67\ \text{kN}$$

为求杆 c 的内力 F_{Nc}，作截面Ⅱ－Ⅱ并取左边部分为隔离体(图 3－44c)。因杆 46 和 57 都位于水平方向，两杆内力均无竖向分力，由竖向力平衡方程

$$\sum F_y = 80\ \text{kN} - 2\times 40\ \text{kN} + F_{yc} = 0$$

得

$$F_{Nc} = F_{yc} = 0$$

在用截面法求桁架内力时，若所截各杆件中的未知力数目超过三个，则一般不可能利用隔离体的三个平衡方程将其全部解出。但对于某些特殊情况，仍可利用平衡条件解出其中某一杆件的未知内力，使分析取得突破。例如，对于例 3－10 的桁架，若取截面Ⅰ　Ⅰ如图 3－45a 所示，

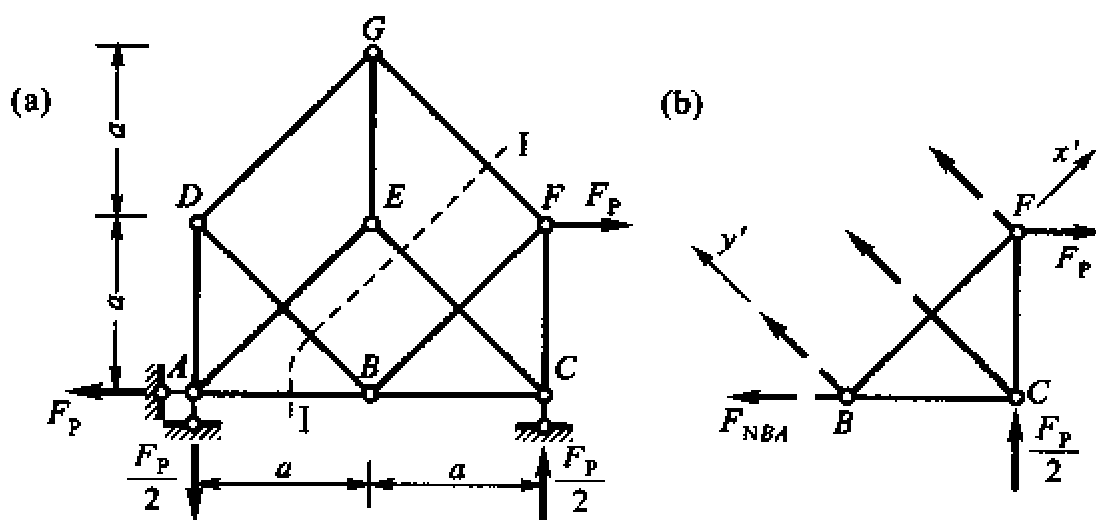


图 3－45

则图 3－45b 所示的隔离体上共截断四根杆件。由于除 AB 杆外的其余三杆相互平行，故由 $\sum F_{x'} = 0$ 可得

$$F_P\sin 45^\circ + \frac{F_P}{2}\sin 45^\circ - F_{NBA}\sin 45^\circ = 0$$

可解得

$$F_{NBA} = \frac{3}{2}F_P$$

此后，便可利用结点法求出桁架其余杆件的内力。又如，对于图 3－46 所示的桁架，为求杆 a 的内力可作截面Ⅰ－Ⅰ，此时虽截断了五根杆件，但因除杆 a 外其余杆件的延长线均交于 A 点，所以取Ⅰ－Ⅰ所围部分为隔离体，将 F_{Na} 移至 B 点分解，由 $\sum M_A = 0$ 得

$$F_P\times 2d+F_{ya}\times 3d=0$$

故

$$F_{ya}=-\frac{2}{3}F_P$$

利用几何关系，可求得

$$F_{Na}=\frac{\sqrt{5}}{2}F_{ya}=-\frac{\sqrt{5}}{3}F_P(\text{压力})$$

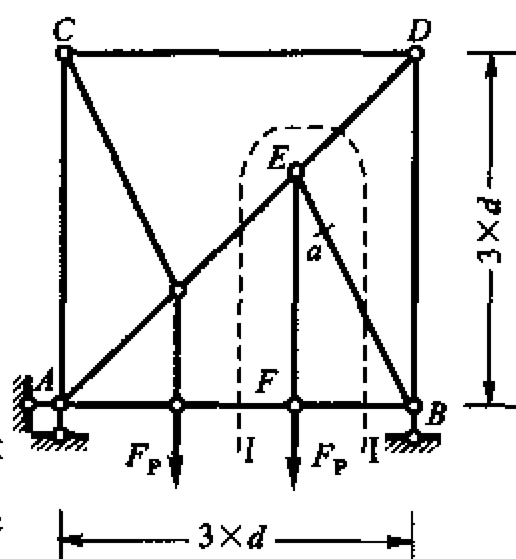


图 3-46

运用截面法有时需取一个以上的截面，然后列出不同的隔离体平衡方程，联立解得杆件的未知内力。例如，图 3-47a 所示的桁架从几何构造上分析属三刚片问题，其求解方法与图 3-47b 所示三铰刚架的求解相似。求解三铰刚架时，可以将其中的一个铰（如铰 A）拆除，代以两个未知的约束力（F_{xA}、F_{yA}），列出整体和局部对于另两个铰的力矩平衡方程并联立求解，即可求得上述未知约束力。对于图 3-47a 所示的桁架，可分别作截面 $m-m$ 和 $n-n$，均切断了形成虚铰（Ⅰ，Ⅲ）的杆 AB 和 C 支座链杆，然后分别取 $m-m$ 和 $n-n$ 所围部分为隔离体，列出对另两个虚铰（Ⅰ，Ⅱ）和（Ⅱ，Ⅲ）的力矩平衡方程。两个方程中均只有 AB 杆的轴力和 C 支座的竖向反力未知，将方程联立便可解得。这样，其余杆件的内力也就可迎刃而解。

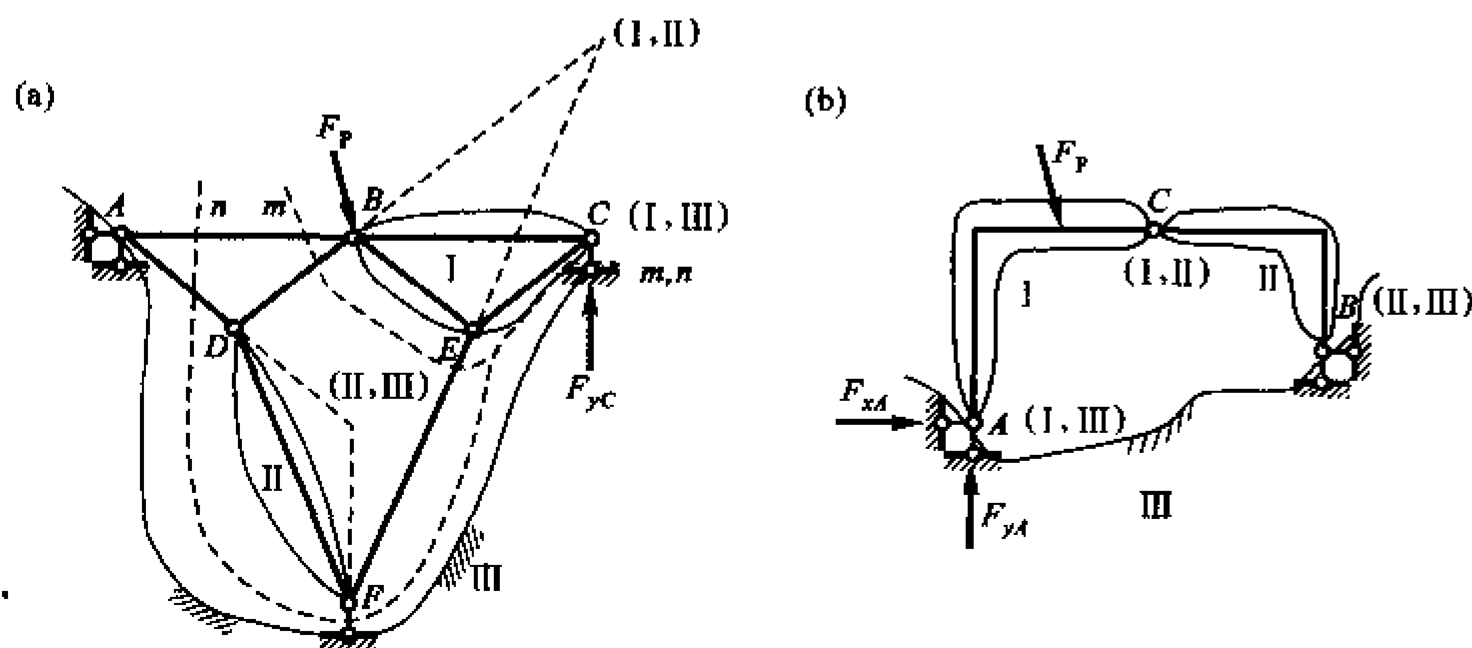


图 3-47

3-4-3　截面法和结点法的联合应用

在桁架计算中，若某一杆件的内力仅凭借一个结点的平衡条件或只作一次截面均无法解得时，常可将截面法和结点法联合应用，以求突破。

例 3-12　试求图 3-48a 所示桁架中 a、b 和 c 三杆的内力。

解　先求出桁架支座反力如图。为求杆 a 的内力，作截面 Ⅰ-Ⅰ 并取其左部为隔离体。此时因截断了四根杆件，故仅由此截面尚不能求解。为此，可截取结点 K 为隔离体（图 3-48b），由 K 形结点的平衡特性可确定 a、c 两杆内力之间的关系为

$$F_{Na}=-F_{Nc}\quad\text{或}\quad F_{ya}=-F_{yc}$$

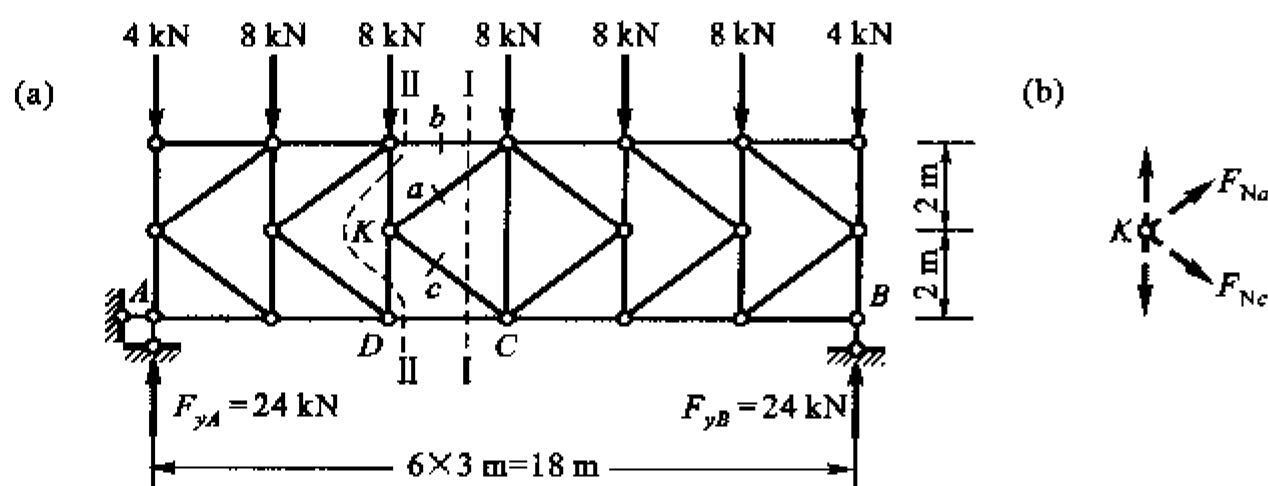


图 3-48

再根据截面Ⅰ-Ⅰ左部隔离体$\sum F_y=0$,有

$$24\ \text{kN}-4\ \text{kN}-8\ \text{kN}-8\ \text{kN}+2F_{ya}=0$$

可解得

$$F_{ya}=-2\ \text{kN}$$

由比例关系得

$$F_{Na}=-2\ \text{kN}\times\frac{\sqrt{13}}{2}=-3.61\ \text{kN}\ (\text{压力}),\quad F_{Nc}=-F_{Na}=3.61\ \text{kN}$$

此后,就可利用隔离体力矩平衡条件$\sum M_C=0$进一步求得F_{Nb}。求解F_{Nb}更为简捷的方法是取截面Ⅱ-Ⅱ。此时虽截断了四根杆件,但除杆b之外其余三杆都通过D点,列出截面左部隔离体的力矩平衡方程$\sum M_D=0$,有

$$24\ \text{kN}\times6\ \text{m}-4\ \text{kN}\times6\ \text{m}-8\ \text{kN}\times3\ \text{m}+F_{Nb}\times4\ \text{m}=0$$

得

$$F_{Nb}=-24\ \text{kN}\ (\text{压力})$$

对于桁架中无荷载作用的K形结点来说,若两根侧杆的倾角不相同,则其内力数值也将不同,但仍然可以根据其平衡特点,确定侧杆内力之间的比值。

3-4-4 各类梁式桁架的比较

梁式桁架可以看作是由梁演化而来,图3-49分别示出了同样跨度的梁和常见梁式桁架,在相同均布荷载(图中已化为量纲为1的结点荷载)作用下的内力情况。由图中可见,桁架的外形对于杆件内力的分布有很大影响。平行弦桁架(图3-49c)弦杆的内力由跨中向两端递减;而三角形桁架(图3-49e)弦杆的内力却由跨中向两端递增。这是因为桁架是依靠上、下弦杆的内力形成截面弯矩的,弦杆的内力可表达为

$$F_N=\pm\frac{M^0}{r}$$

式中M^0为同样跨度简支梁(图3-49a)相应桁架结点位置的截面弯矩(图3-49b),r为弦杆内力对矩心的力臂。在均布荷载作用下,简支梁的弯矩是按抛物线规律变化的,在跨中达到最大值。因平行弦桁架弦杆的力臂是不变的,所以内力由跨中向两端递减;而三角形桁架弦杆的力臂由跨中向两端按线性规律递减,快于M^0按抛物线规律递减的速度,所以弦杆内力由跨中向两端递增。当桁架的上弦结点位于一条抛物线上时(图3-49d),其下弦杆以及各上弦杆水平分力对

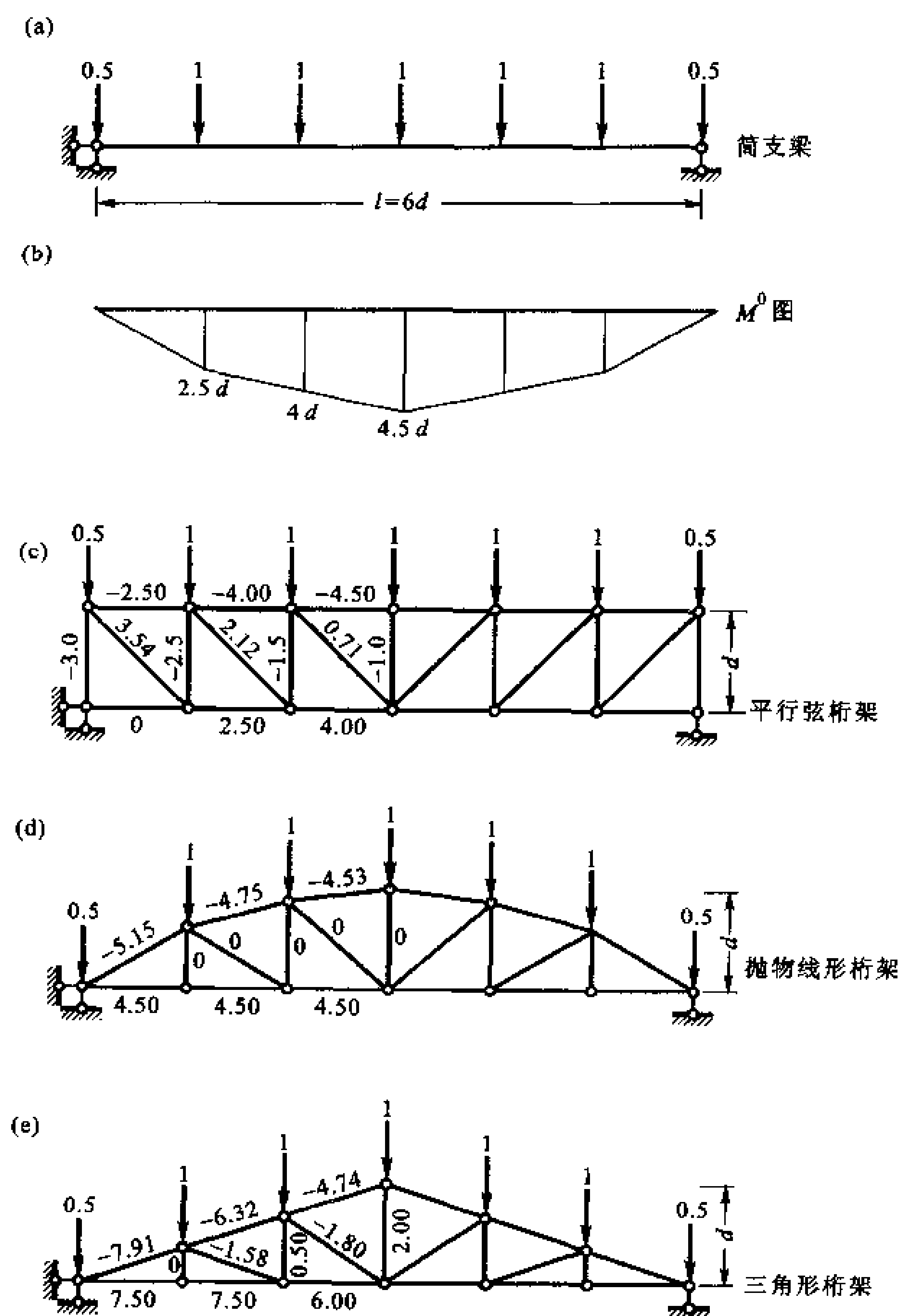


图 3-49

矩心的力臂与 M^0 一样均按抛物线规律变化，故各下弦杆内力以及各上弦杆水平分力的大小均相等，这样各上弦杆的内力也近乎相等。

平行弦桁架的竖杆内力以及斜杆的竖向分力等于简支梁相应位置上的剪力，故由中间向两端递增；抛物线形桁架的上弦符合于合理拱轴线，此时作用于上弦结点的竖向力完全由上弦杆的轴力平衡，故腹杆内力为零；三角形桁架的腹杆内力则由中间向两端递减。

折线形桁架的外形一般取比较接近于抛物线形桁架，此时两者的内力分布情况也比较接近；而梯形桁架是介于平行弦和三角形桁架之间的一种桁架形式。

不同类型的桁架具有不同的受力特点，在桁架设计时应予以充分考虑。同时，在设计中需综合桁架使用功能方面的要求，所受荷载的情况，材料、制作工艺以及结构构造方面的差异，合理地加以选择。例如，木屋盖中的木屋架一般采用三角形，这一方面有利于发挥作为弦杆的整根木材的强度，另一方面便于满足瓦屋面防水所要求的较大坡度。钢屋架常采用梯形，此时弦杆内力分布比较均匀，且因上弦在半跨范围无折点而便于结点构造，也有利于上弦抵抗因结间荷载引起的次弯矩，对卷材防水屋面的坡度要求亦易满足。混凝土屋架一般是现浇的(腹杆常为预制的)，上弦杆的弯折不会引起结点构造方面的困难或弦杆抗弯强度的损失，结合屋面防水坡度方面的要求，常采用比较接近于抛物线形的折线形桁架。

3-4-5　杆件替代法

对于某些比较复杂的桁架，通过单个结点或仅作一个截面均无法突破求解时，运用杆件替代法不失为一种颇有有效的解题方法。这一方法的基本思路是：通过杆件(包括支座链杆)之间的替代，简化桁架的几何构造，然后再使简化后桁架杆件的内力恢复到原结构的状态。

图3-50a所示的桁架可以按前所述利用对称性或按三刚片问题求解，但前一种方法在几何尺寸不对称时就无法使用，而后一种方法需作两次截面建立联立方程。以下介绍如何运用杆件替代法来求解。

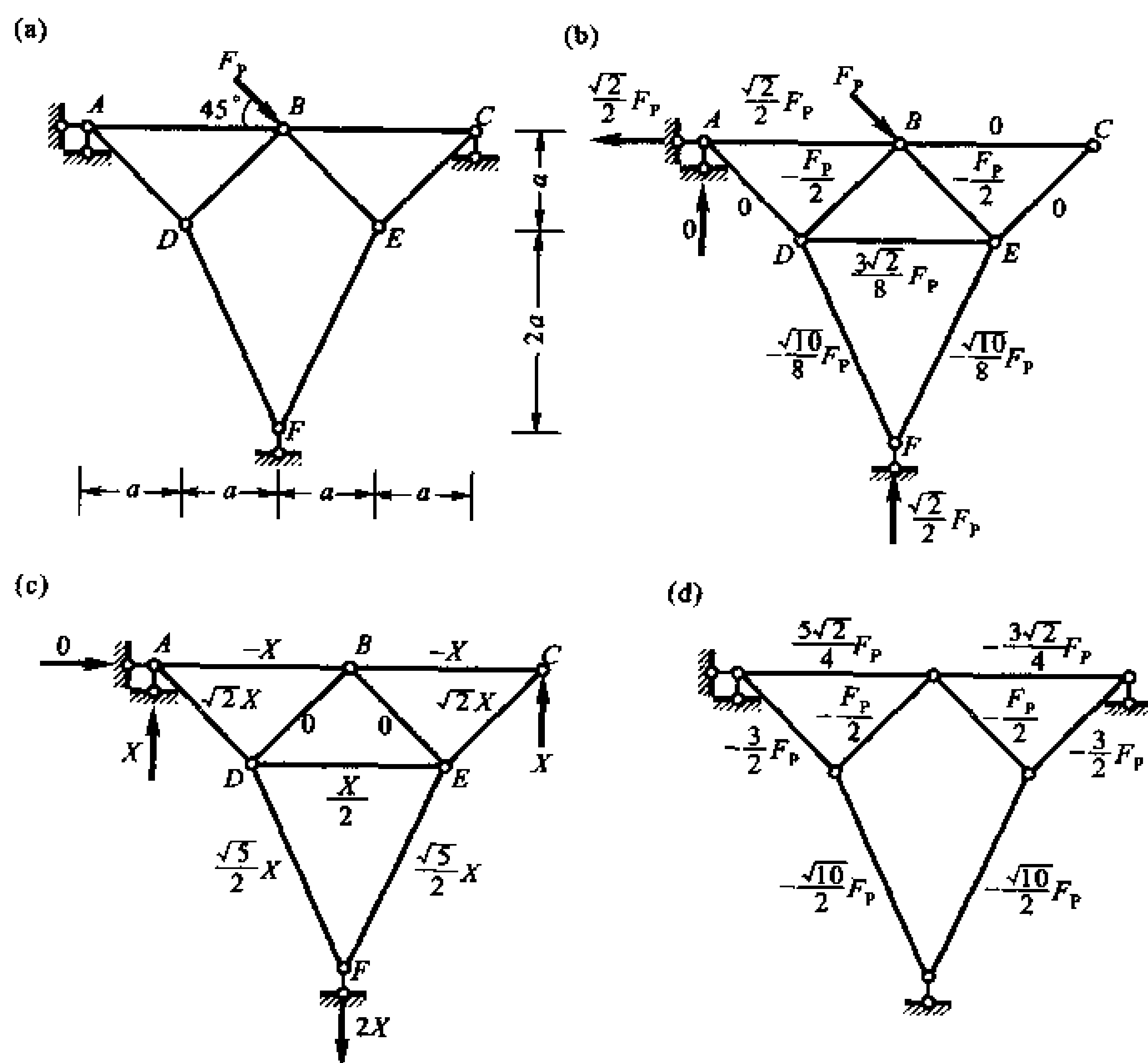


图　3　50

若将该桁架 C 支座处的链杆拆除，而代之以 D、E 之间增设链杆，则可得到图 3-50b 所示的简单桁架。此时桁架内力易求得，其中 $F_{NDE}=\frac{3\sqrt{2}}{8}F_P$。为使杆件替代之后，所得桁架的内力与原结构相符，可在 C 支座处作用未知反力 X（图 3-50c），此时可求得 $F_{NDE}=\frac{X}{2}$。因实际结构中并不存在 DE 杆，所以 C 支座真实的反力应使图 3-50b、c 所示受力状态叠加后，DE 杆的内力为零。即

$$\frac{3\sqrt{2}}{8}F_P+\frac{X}{2}=0$$

解得

$$X=-\frac{3\sqrt{2}}{4}F_P(\downarrow)$$

通过以上杆件替代求得 C 支座反力之后，桁架的内力便可迎刃而解，如图 3-50d 所示。

以上杆件替代法的基本思路，也可以用于桁架中 n 个杆件同时被替代的情况。根据 n 个替代杆中内力为零的条件，可以解出 n 个被替代杆中的未知轴力。

§3-5 组合结构

组合结构是指由若干链杆和刚架式杆件联合组成的结构，其中链杆只承受轴力，称为二力杆；刚架式杆件则一般受到弯矩、剪力和轴力的共同作用。组合结构常用于房屋建筑中的屋架、吊车梁以及桥梁等承重结构。例如，图 3-51a 所示的下撑式三铰组合屋架和图 3-52 所示的悬吊式桥梁均属于组合结构。根据组合结构中两类杆件受力特点的差异，工程中常采用不同的材料制作以达到经济的目的。例如，组合屋架的上弦一般设计为混凝土构件，下弦拉杆则可采用型钢构件，而撑杆可用混凝土或型钢制作。悬吊式桥梁的跨度较大时，可以将加劲梁换为加劲桁架。

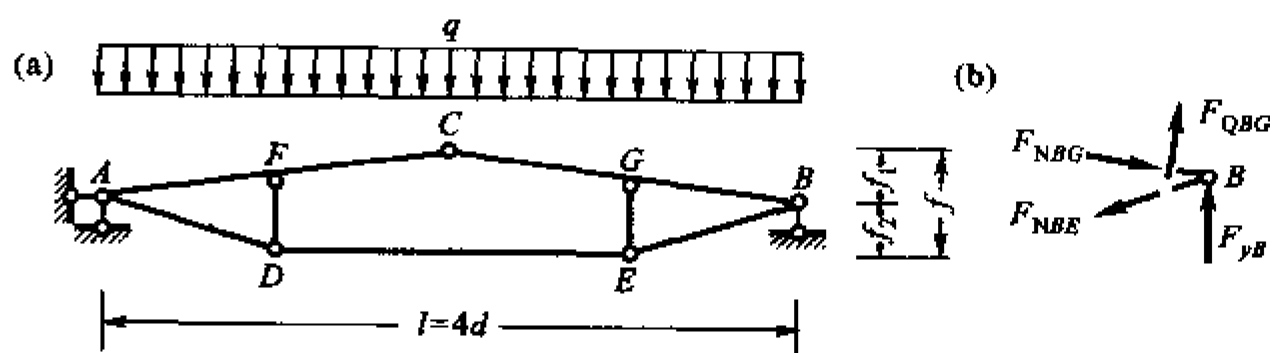


图 3-51

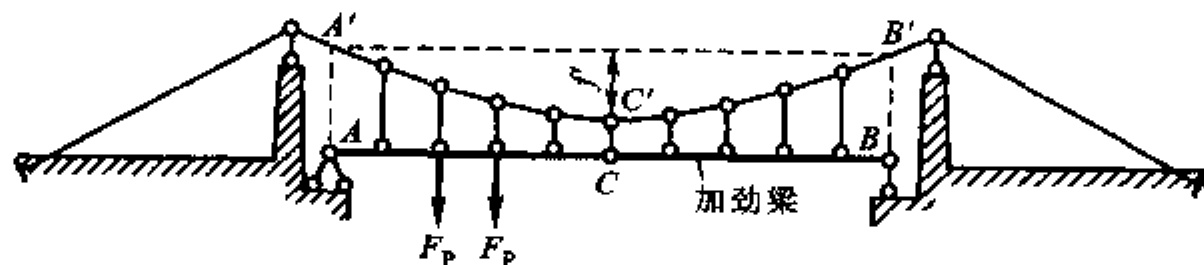


图 3-52

静定组合结构受力分析的基本原理仍与一般静定结构相同，通常可先求出支座反力，计算各链杆的轴力，然后再分析受弯杆件的内力。分析时需特别注意区分两类不同性质的杆件。例如，若选择图 3－51b 的端结点隔离体，需注意不宜遗漏受弯杆（上弦杆）的剪力 F_{QBG}。另外，需留意受弯杆的轴力和剪力可沿杆长发生变化。

例 3－13 试分析图 3－53a 所示组合结构的内力。

解 先由结构的整体平衡求得支座反力：

$$F_{xA}=0,\quad F_{yA}=40\ \text{kN}\ (\uparrow),\quad F_{yB}=20\ \text{kN}\ (\uparrow)$$

作截面Ⅰ－Ⅰ，取其右部为隔离体，由

$$\sum M_C=20\ \text{kN}\times4.5\ \text{m}-F_{NDE}\times1\ \text{m}=0$$

得

$$F_{NDE}=90\ \text{kN}\ (\text{拉力})$$

以下便可通过结点 D 和 E 的平衡条件，求得其余链杆的内力（图 3－53b）。

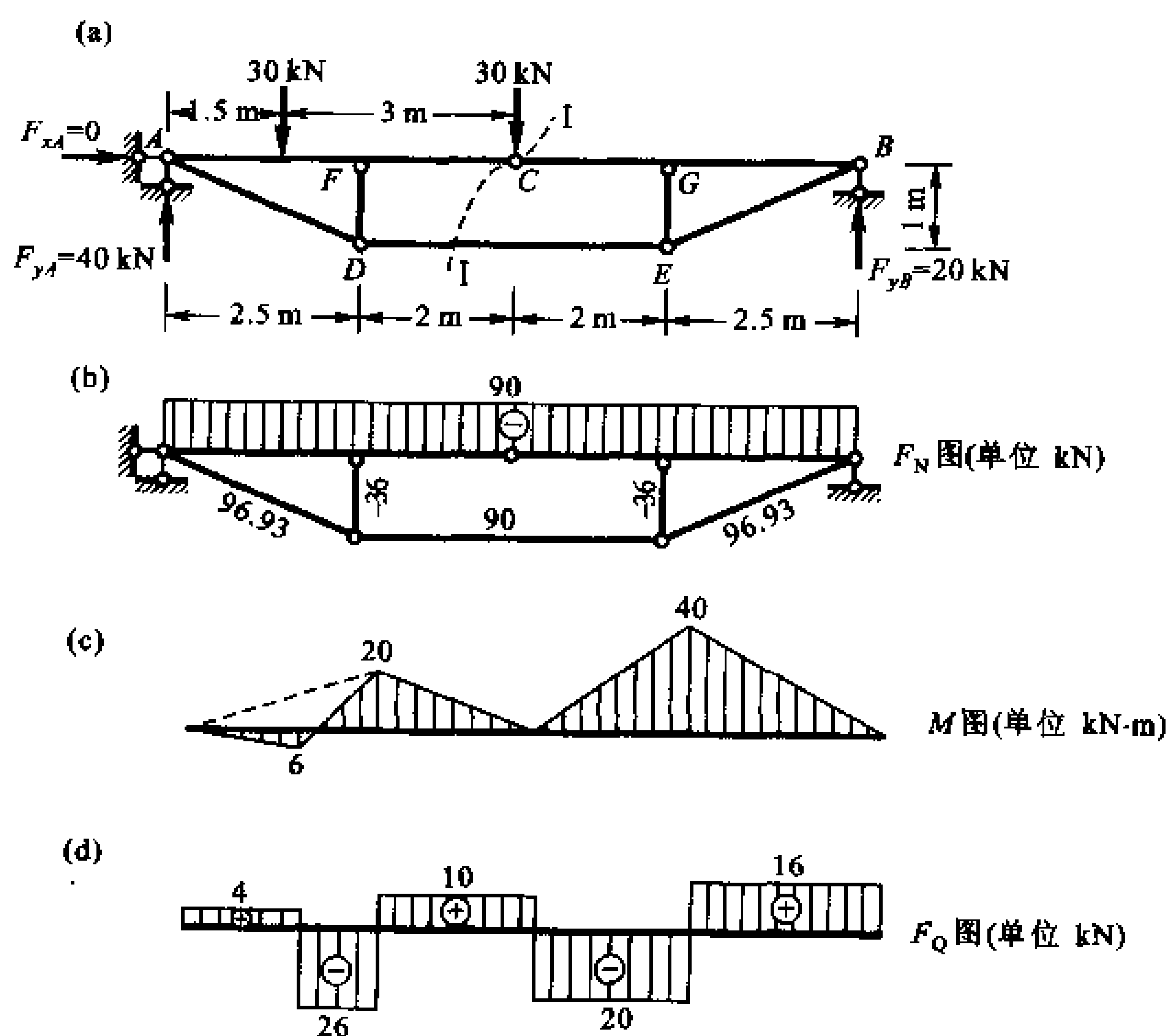


图 3－53

受弯杆件 AC 和 BC 的内力可以利用隔离体平衡条件求得。更为简捷的方法是直接运用力学基本概念进行分析：因 DE 杆与受弯杆平行，链杆 DF 和 EG 又与之垂直，可判定受弯杆全长受轴向压力 90 kN；受弯杆上 F、G 点的弯矩分别为

$$M_F=F_{yA}\times2.5\ \text{m}-F_{NDE}\times1\ \text{m}-30\ \text{kN}\times1\ \text{m}=-20\ \text{kN·m}\ (\text{上侧受拉})$$

$$M_G=F_{yB}\times2.5\ \text{m}-F_{NDE}\times1\ \text{m}=-40\ \text{kN·m}\ (\text{上侧受拉})$$

于是，便可结合叠加法作出杆件的弯矩图，并根据弯矩图的斜率作出剪力图，如图 3－53c、d 所示。

例 3－14 试计算图 3－54a 所示组合结构中链杆的轴力，并作出受弯杆的弯矩图。

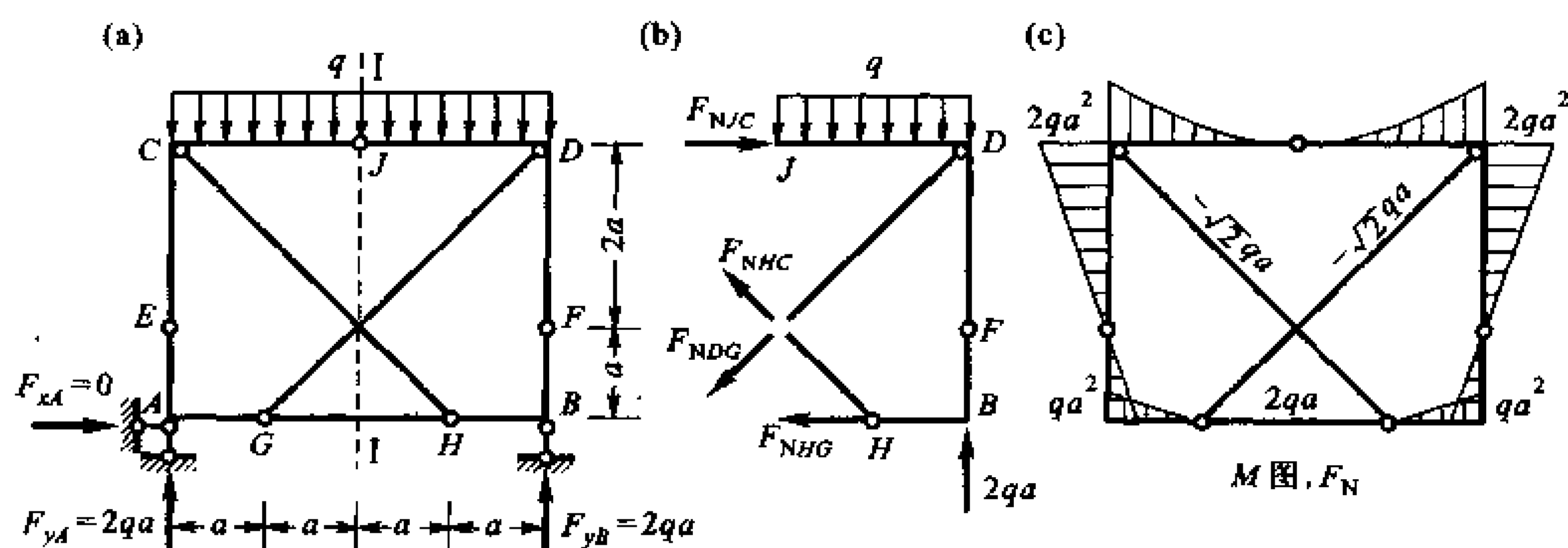


图 3-54

解 先求得支座反力如图所示。因 A 支座水平链杆不受力，所以结构处于对称受力状态。于是，可判定 $F_{NHC}=F_{NDG}$，且 J 点处无剪力存在(在对称面上剪力属反对称内力)。

作截面 I - I，以其右部为隔离体(图 3-54b)，可写出对于 J 点的力矩平衡方程

$$F_{NHG}\times 3a+F_{NHC}\times\sqrt{2}a+F_{NDG}\times\sqrt{2}a+q\times 2a\cdot a-2qa\times 2a=0$$

再考虑 HBF 部分对 F 点的力矩平衡，有

$$F_{NHG}\cdot a+F_{NHC}\times\sqrt{2}a=0$$

结合 $F_{NHC}=F_{NDG}$ 的条件，可解得各链杆轴力，并进而求得受弯杆的弯矩图，如图 3-54c 所示。

本例亦可直接运用力学基本概念分析如下：首先，因 J 点处无剪力，DJ 杆的弯矩与一般悬臂梁的完全相同；根据结点力矩平衡和铰 F 处弯矩为零的条件，可迅速作出 DFB 段和 BH 段的弯矩图；由 F_{NHC} 链杆的竖向分力引起 HB 段的弯矩推得，$F_{NHC}=-\sqrt{2}qa$；再由 HBF 部对 F 点的力矩平衡求得 $F_{NHG}=2qa$；最后，可以根据对称性得到另半边结构的内力。

若将例 3-14 的刚架中铰 F 的位置上移，如图 3-55a 所示，则结构的受力状态不再对称，求解就变得较为困难。此时，如图 3-55b 所示，可将刚片 EAG 和 HBF 视作链杆，将链杆 GH 视作刚片，然后按三刚片问题进行求解；即用 $m-m$ 截断形成无穷远处虚铰的链杆 CH 和 EG，由刚片Ⅲ对虚铰(Ⅱ,Ⅲ)和刚片Ⅱ、Ⅲ联合体对虚铰(Ⅰ,Ⅱ)的力矩平衡方程联立解得以上两链杆的轴力，问题便可迎刃而解。其中 EAG 部的弯矩可根据虚拟链杆 EG 的轴力按图 3-55c 求得。

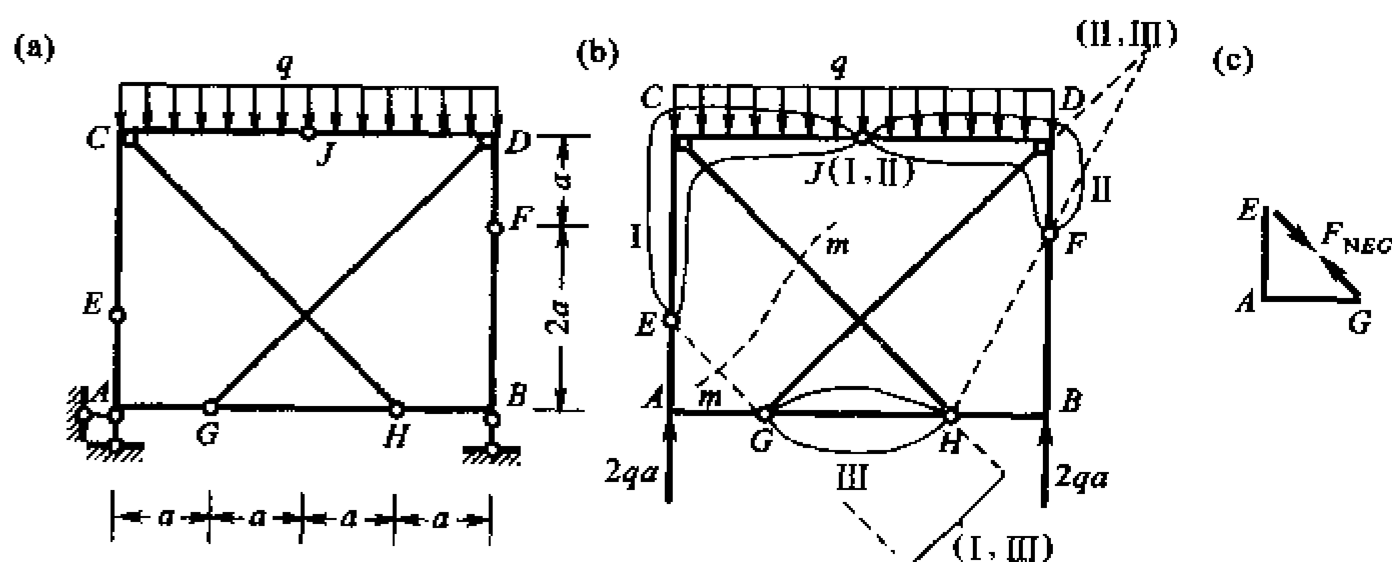


图 3-55

§3-6 静定空间结构

如果结构各杆件的轴线或是所受的外部作用不在同一平面内，则结构一般处于空间受力状态，这类问题的分析称为空间结构的分析问题。若此时结构无多余约束，则称为是静定的，否则就是超静定的。图3-56a所示为工业与民用房屋中常见的超静定空间刚架结构；图3-56b所示为一静定空间桁架的立面和半平面图，因其杆件呈网状构成并形成壳体外形，所以常称为网壳结构。

由理论力学可知，空间一动点有3个自由度，相应地空间汇交力系有三个平衡条件，可表达为

$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0,\quad \sum F_z=0$$

空间一刚体有6个自由度，相应地空间一般力系有六个平衡条件，除以上所列三个力的平衡条件外还包括三个力矩平衡条件，可表达为

$$\sum M_x=0,\quad \sum M_y=0,\quad \sum M_z=0$$

静定空间结构的反力和内力均可由以上静力平衡条件求出，而且解答是惟一的。

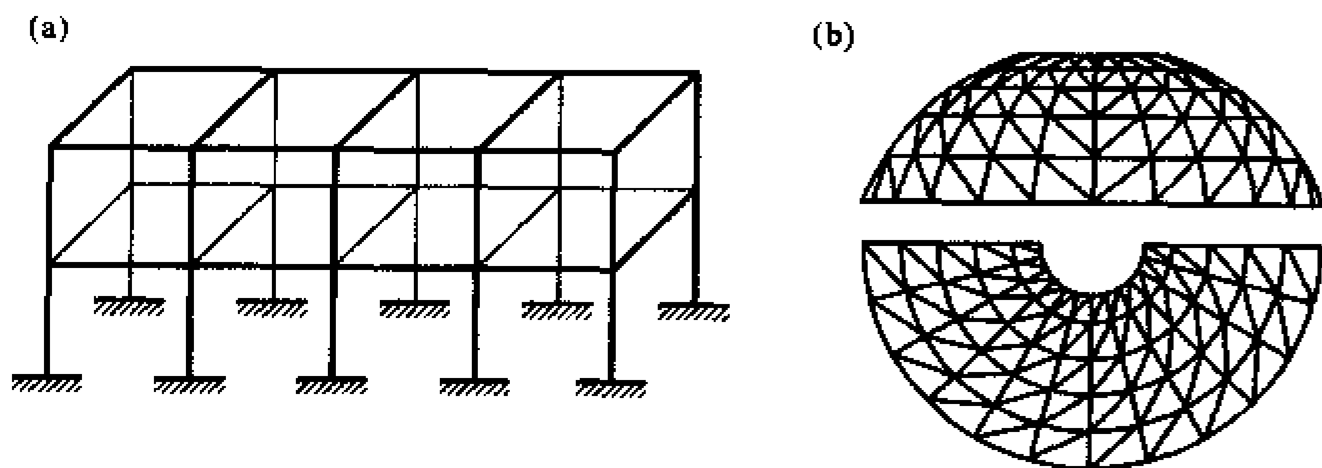


图 3-56

3-6-1 静定空间刚架

在空间受力状态下，刚架杆件截面上的内力一般可按矢量合成原理分解为六个内力分量，包括沿杆件纵轴的轴向力 F_N，沿横截面两正交方向的剪力 F_{Q1}、F_{Q2} 三个力分量，以及绕纵轴的扭矩 M_t 和绕横截面上述两方向的弯矩 M_1、M_2 三个力矩分量，如图3-57所示。图中力矩矢量均按右手螺旋法则用双剪头表示。

静定空间刚架的内力仍可采用隔离体方法求得。因空间一般力系有六个平衡条件，故可对所取隔离体建立六个平衡方程，并由此求出六个未知的内力分量。一般可先求出各杆的杆端内力，然后便可作出刚架的内力图。空间刚架中杆件的扭矩 M_t 以与截面外法线方向一致为正，其余内力的正向仍然按照关于平面刚架的相关规定来取。

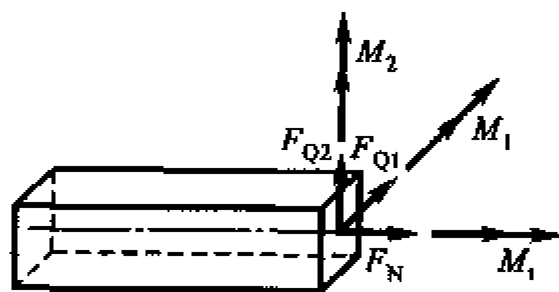


图 3-57

图3-58a所示的空间刚架杆件截面为矩形(图3-58b)，其

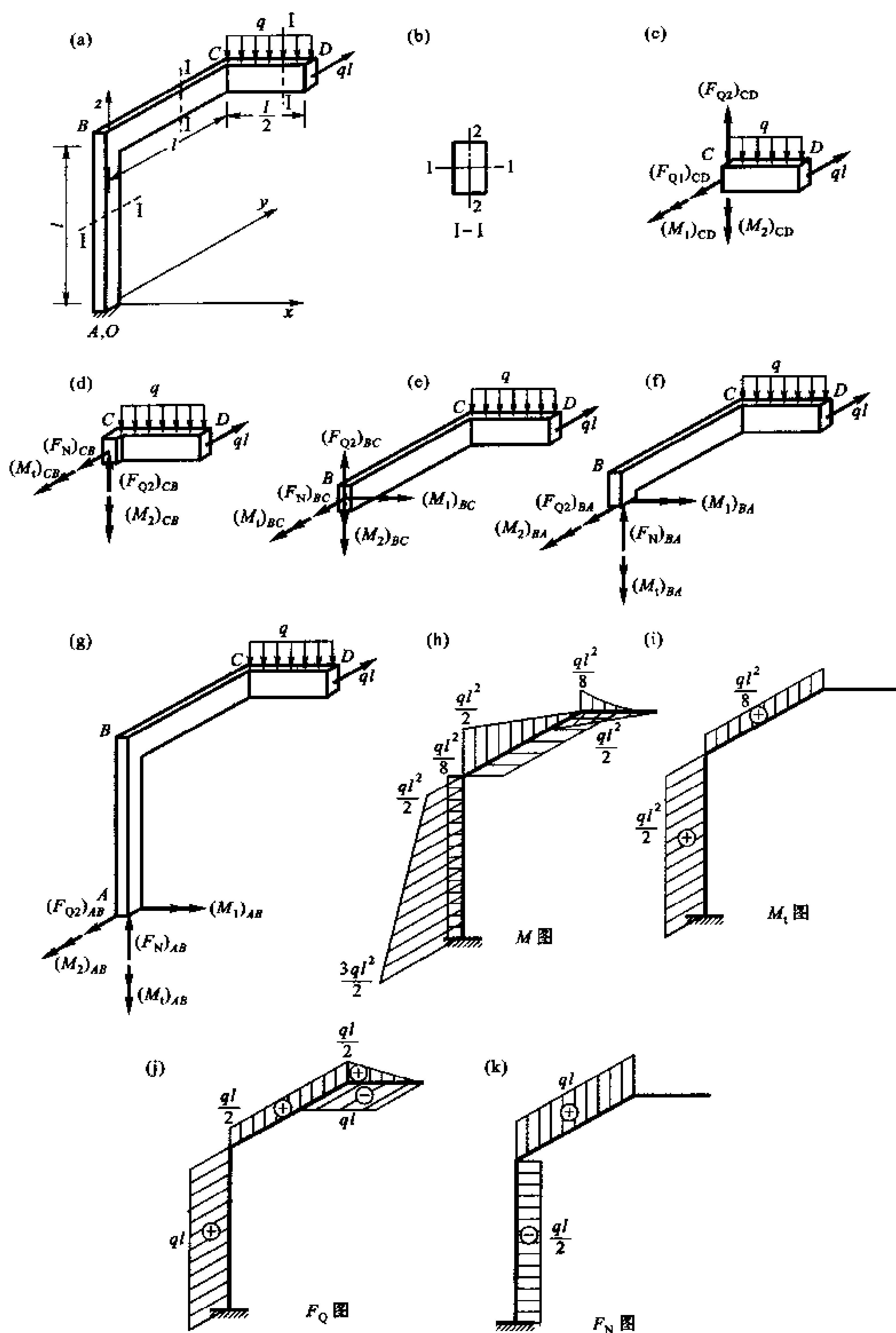


图　3-58

且没有多余约束,称为联合空间桁架。如图 3-61 中两个简单桁架之间由链杆 1、2、3、4、5、6 相联,构成静定的联合空间桁架。若六根链杆的布置不符合上述前提条件,如图 3-60b 中六根支杆均通过 AB 连线,图 3-60c 中六根支杆位于相互平行的平面内,则构成的体系几何可变。

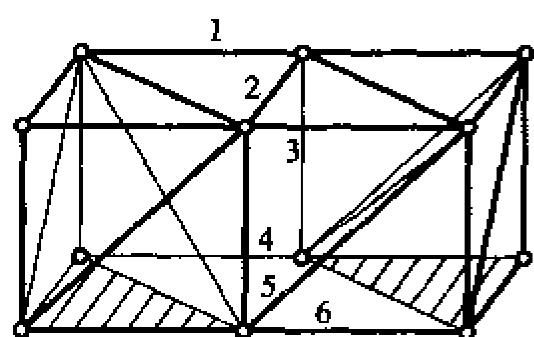
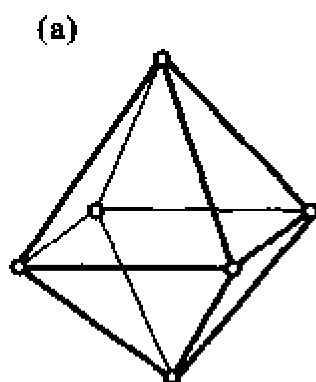


图 3-61



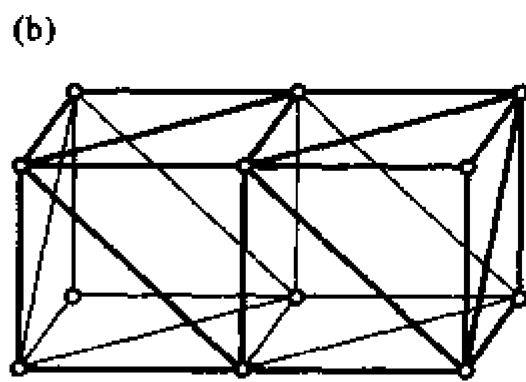


图 3-62

(3) 复杂空间桁架

不属于以上两类的空间桁架称为复杂空间桁架。例如,可以证明,图 3-62a、b 所示界面为三角形或由三角形组成的几何不变平面体,且体系内部无链杆相联的铰结闭合多面体,是内部几何不变的,并且无多余约束。

静定空间桁架的受力分析仍然可采用结点法和截面法,并且也常可利用结点平衡的特殊情况简化计算。常见的几种情况是:

(1) 不在同一平面内的三杆结点上无外力作用时,则三杆均为零杆(图 3-63a)。

(2) 若结点上除某一单独杆件外,其余各杆以及外力均在同一平面内,则此单独杆件为零杆(图 3-63b)。

(3) 若结点上有两杆在一直线上,而其余各杆以及外力均在与此直线相交的同一平面内,则此两杆的内力相等(图 3-63c)。

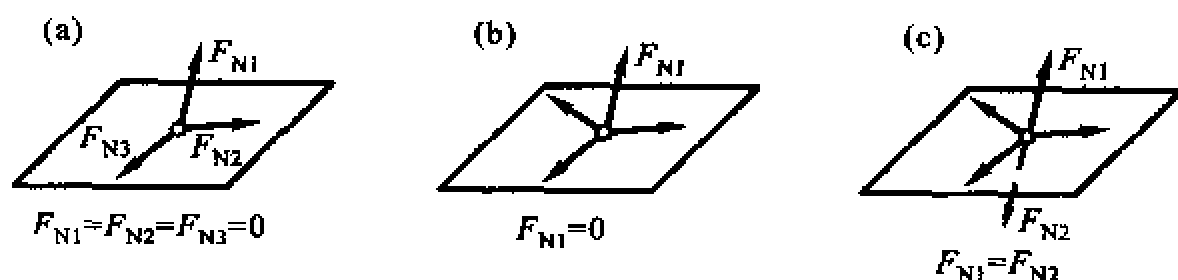


图 3-63

例 3-15 试求图 3-64a 所示静定空间桁架各杆的内力。

解 结点 3 处有三杆在同一平面内,23 杆与外力共线,根据结点平衡的特殊情况可判定 $F_{N23}=-6$ kN。作截面Ⅰ-Ⅰ,由 $\sum F_y=0$ 可判定 $F_{N1B}=0$。

作截面Ⅱ-Ⅱ切断 53 和 54 两杆,记两杆竖向分力分别为 F_{z53} 和 F_{z54},由隔离体(图 3-64b)力矩平衡条件 $\sum M_{12}=0$ 得

$$(F_{z53}+F_{z54})\times 6\text{ m}=6\text{ kN}\times 3\text{ m}$$

又取图 3-64c 所示隔离体,因杆 53 和 54 倾角相等,且除图示之外的其余杆件及外力均位于与之垂直的平面内,由 $\sum F_y=0$ 可推知,$F_{N53}=F_{N54}$,其在 z 方向的分力也必定相同。于是,可由上式结合比例关系求得

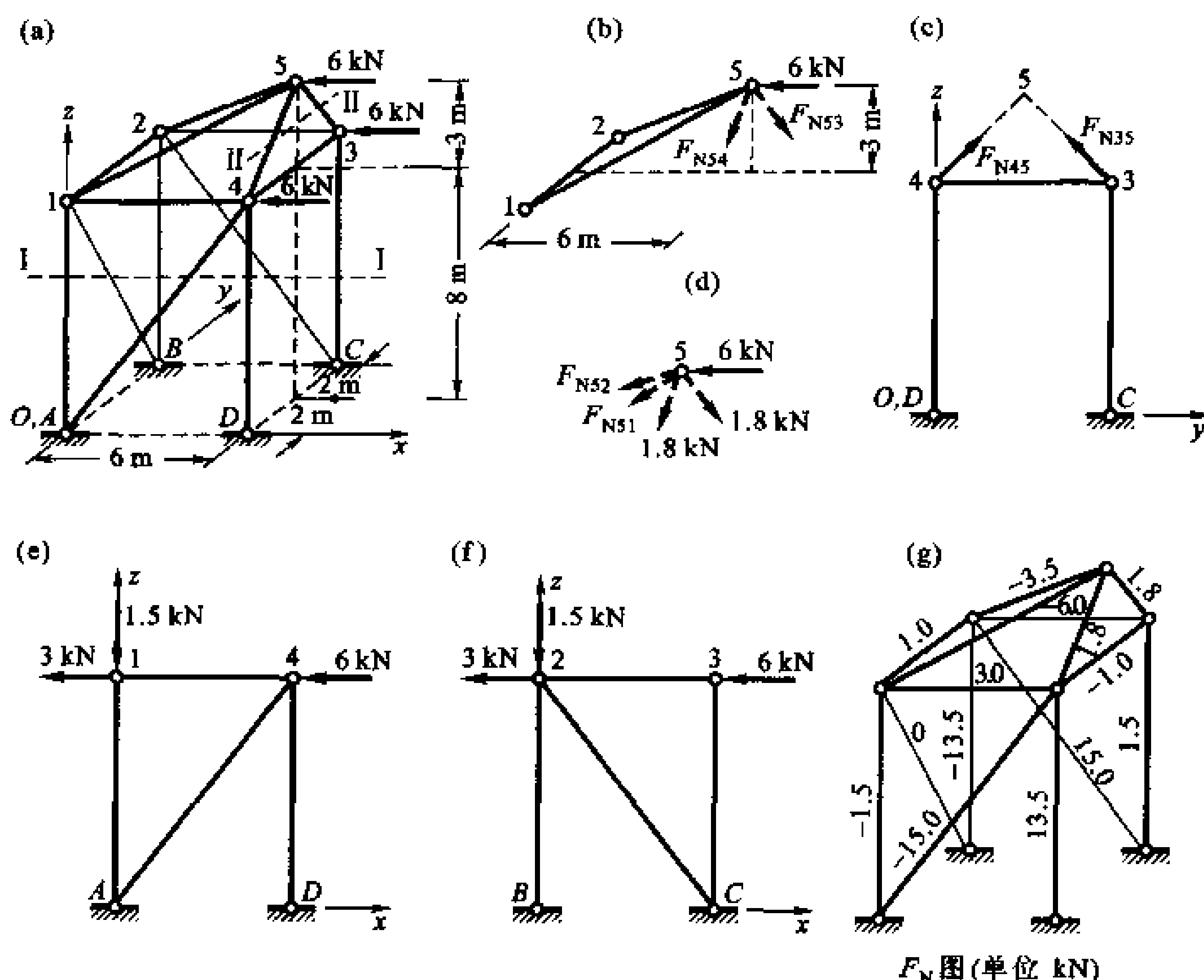


图 3-64

$$F_{N53}=F_{N54}=\frac{\sqrt{13}}{2}\text{ kN}=1.8\text{ kN}$$

以下可由结点5(图3-64d)的平衡条件,结合比例关系求得

$$F_{N51}=F_{N52}=-3.5\text{ kN}$$

并进而用结点法求得

$$F_{N34}=-F_{N12}=-1.0\text{ kN}$$

平行于 Oxz 平面的两个侧面上杆件的内力,可分别按照图3-64e、f所示的平面桁架计算求得,其中分别作用于1、2结点上的外力1.5 kN为杆51、52的轴力在图示平面内的两个分力。

桁架的最终内力如图3-64g所示。

3-6-3 转化成平面问题

工程中有许多空间结构的受力分析问题,可以利用结构在构成方式和荷载方面的特点,分解成平面问题,或者是近似地转化成平面问题求解,从而使计算工作大为简化。

图3-56a所示的房屋框架属空间刚架结构,由五榀横向框架与两榀纵向框架构成。设计时一般只要求按横向和纵向两个垂直方向分别计算。由于纵向杆件对横向框架在其自身平面内变形的约束作用(纵向杆件的扭矩)很小,反之亦然,而且当各柱间荷载比较均匀时楼板的空间作用也不十分明显,因此一般可取出具有代表性的单榀横向或纵向框架,按平面问题进行分析。此时,需将相应区段内的荷载集中作用于该榀框架上。

图 3-65a 所示为一复杂空间静定桁架，其五个侧面分别由几何不变的平面桁架构成，内部没有杆件，桁架结点 8 上作用有斜向荷载 F_P。桁架任一结点上均不少于四个未知力，但在结点 7 处，除杆 67 外其余三杆在同一平面内，于是可判定 $F_{N67}=0$。这样，与结点 6 相联的其余三杆因不在同一平面内，所以均为零杆。以此类推可以证明，除了位于平面 78CB 和 89DC 内的杆件之外，其余杆件的内力均为零。

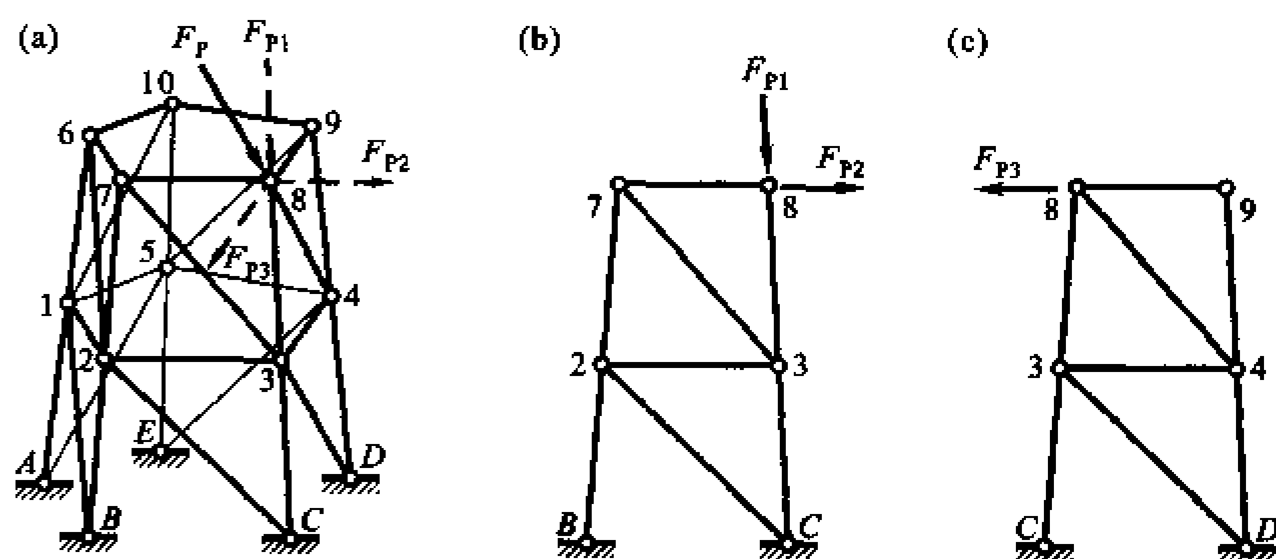


图 3-65

将作用于结点 8 的荷载沿 78、89 和 38 三杆方向（非正交方向）分解成 F_{P1}、F_{P2} 和 F_{P3} 三个分力，然后可分别取图 3-65b、c 的平面桁架计算各杆的内力。其中，位于两平面交线上 38 和 C3 杆的内力应由两图叠加求得。根据静定结构满足平衡条件解答的惟一性，上述求得的内力状态能满足桁架全部结点的平衡条件，所以是真实的。由此可以看出，若静定空间桁架的某一平面由静定平面桁架构成，则作用于这一平面内的荷载仅使该平面内的桁架杆件产生内力。

§3-7 静定结构的一般性质

按照线弹性体系解的惟一性定理，在荷载作用下线弹性体系取得平衡时的内力和变形都是惟一的。由于静定结构的反力和内力均可由静力平衡条件求得，因而可以得到结论：在线弹性范围内，静定结构满足平衡条件的反力和内力解答是惟一的。根据这一性质，只要静定结构的一组解答能满足全部平衡条件，则必然是真实的解答。

满足平衡条件解答的惟一性，是静定结构最基本的静力特征。由此可以推衍出静定结构的多项静力特性，并且为杆件体系几何构造分析的零载法奠定了理论基础。

3-7-1 静定结构的几项特性

静定结构具有以下几项特性，在静力分析中应予以注意，并可加以利用。

（1）温度变化、支座位移、材料收缩和制造误差等非荷载因素不引起静定结构的反力和内力。

例如，图 3-66a、b 分别表示三铰刚架在支座位移和温度变化作用时的情况，图中虚线表示刚架受上述非荷载因素作用后的位形。很明显，因刚架上无荷载作用，支座反力和内力均为零时

可以满足所有平衡条件。根据解的惟一性可知,这就是该刚架的真实解。若从直观的角度分析,可以设想先撤去铰 C 的联结,刚架分为两半后成为可变体系。待支座位移或温度变化发生之后,将半刚架绕支座自由转动求得交点 C'。此时,再恢复铰结,刚架中应无任何反力和内力。

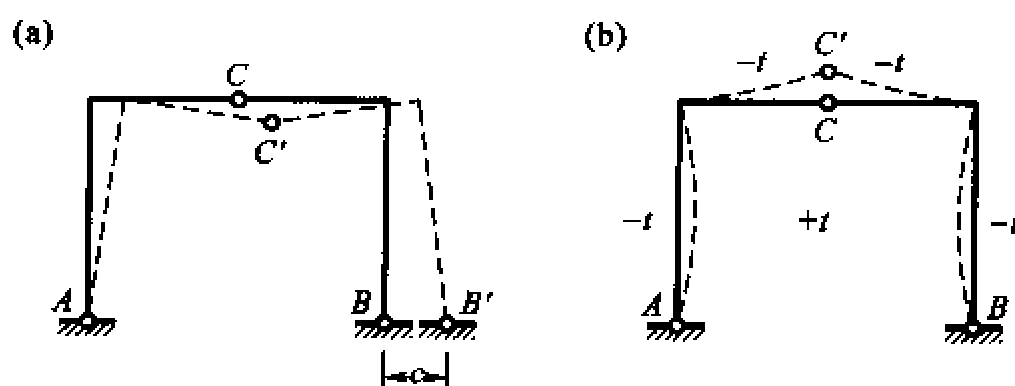


图 3-66

(2) 平衡力系作用于静定结构中某一几何不变或可独立承受该平衡力系的部分上时,则只有该部分受力,而其余部分的反力和内力均为零。

例如,图 3-67a、b 所示的静定刚架,各有一组平衡力系作用于几何不变部分 CD 上,因而仅在 CD 部分上有内力存在,图中绘出了刚架的弯矩图形。图 3-67c 中,荷载与刚架 A 支座的竖向反力构成了平衡力系,所以仅 AC 杆中有轴力存在,其余部分反力和内力均为零。

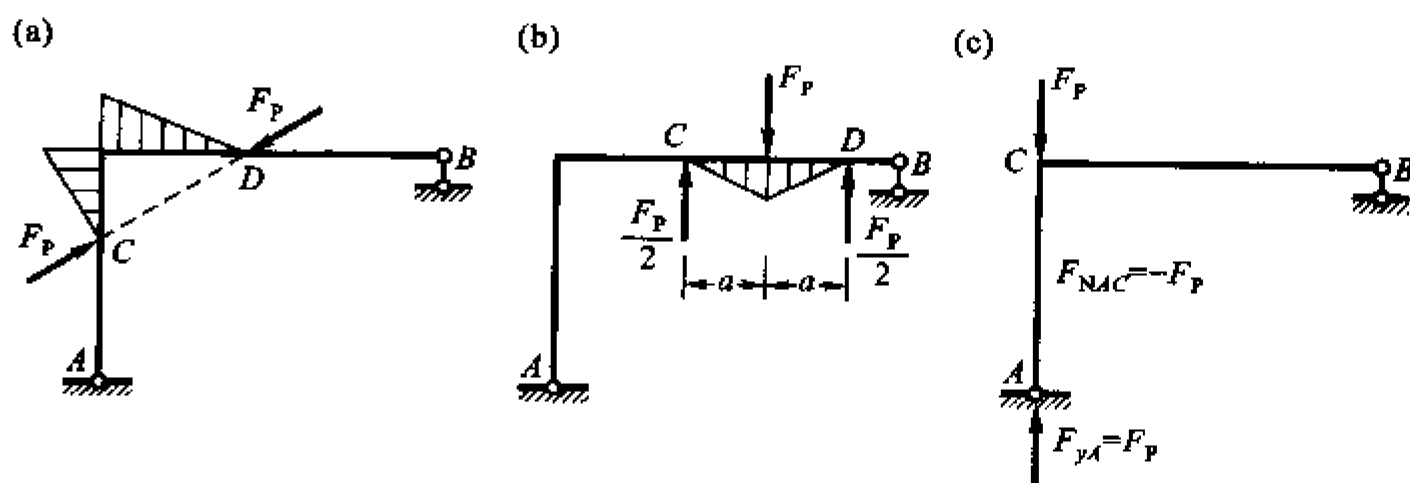


图 3-67

图 3-68a 所示静定桁架的下弦上作用有平衡力系,因为桁架的下弦可以独立承受该平衡力系(图 3-68b),所以除了下弦各杆承受轴向拉力 F_P 外,桁架其余各杆的内力均为零。图 3-69 中荷载与桁架 B 支座反力构成了平衡力系,因此仅 BD 和 DF 杆承受轴向压力 F_P,其余均为零杆。

在以上各例中,因所作用的平衡力系与该部分的内力之间可以达到平衡,其余部分的反力和内力等于零可以满足整体和局部的平衡条件,根据解的惟一性可知,这样的平衡状态就是真实状态。

(3) 当作用于静定结构中某一几何不变部分上的荷载作等效变换(主矢和对同一点的主矩均相等)时,则只有该部分的内力发生变化,而其余部分的反力和内力均不变。

例如,将图 3-70a 中静定梁 CD 杆上的均布荷载用等效集中荷载代替,如图 3-70b 所示,

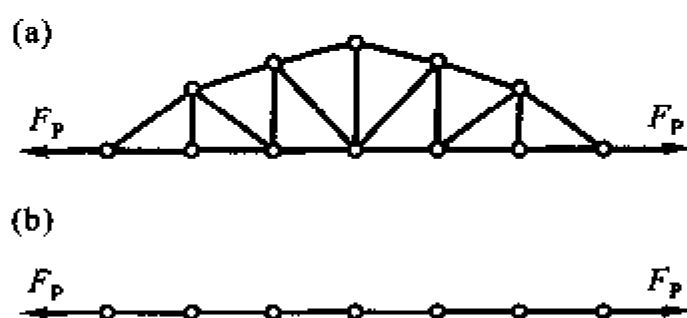


图　3-68

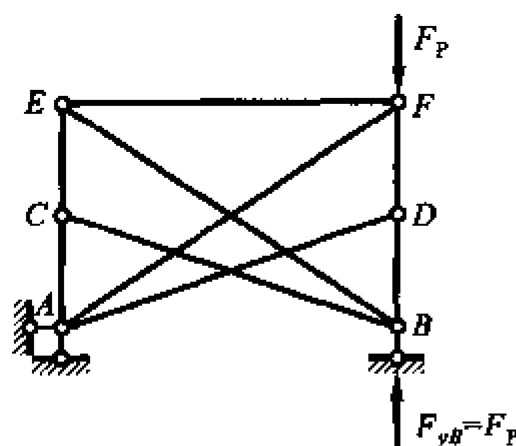


图　3-69

由两者的弯矩图形的对比可以看出，仅 CD 杆的弯矩发生了变化，其余部分的弯矩不变。为了证明这一点，可以将原荷载和反向后的等效荷载共同作用于该梁（图 3-70c），因上述荷载构成平衡力系，所以除 CD 段外，其余部分无反力和内力。根据叠加原理，图 3-70c 梁的反力和内力应为图 3-70a 减去图 3-70b 的值。于是，便可得到结论：图 3-70a 与图 3-70b 在 AC 杆上的反力和内力均相同。

根据上述道理，若将作用于图 3-71a 桁架上弦的结间荷载化为虚线所示的等效结点荷载，或者是将图 3-71b 作用于桁架上弦结点的荷载下移，均只改变 CD 杆的内力，桁架的反力和其余部分的内力均不受影响。

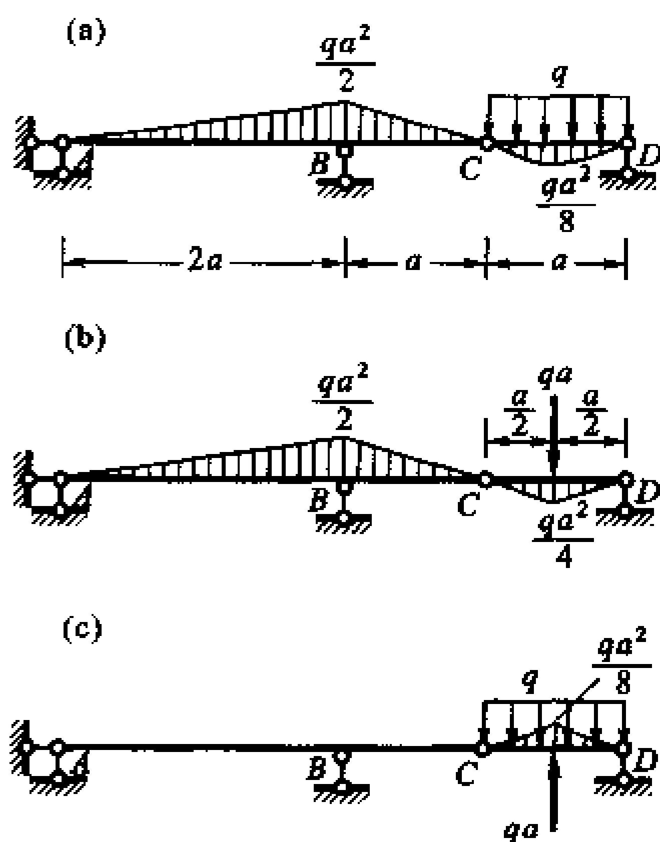


图　3-70

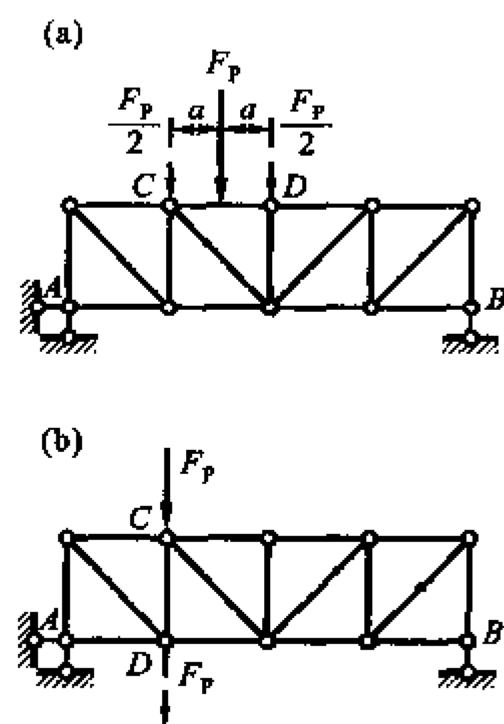


图　3-71

当发生荷载等效变换的局部为内部几何可变时，则上述结论一般不再适用。例如，图 3-72a、b 中，虽梁上的荷载是静力等效的，但因为 BD 段为内部几何可变的，所以两者的弯矩图形就完全不同。

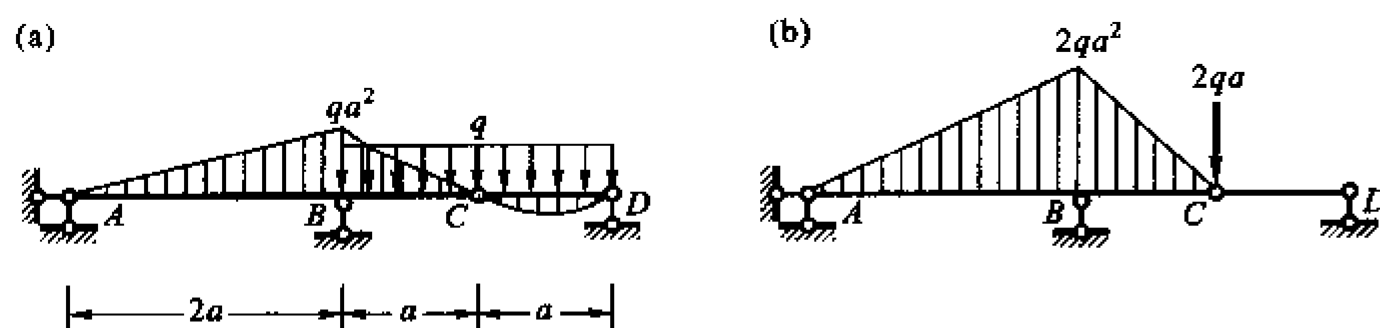


图　3-72

(4) 静定结构中的某一几何不变部分作构造改变时,其余部分的反力和内力均不变。

例如,图3-73a中的静定桁架,下弦受结间荷载作用。为改善下弦的受力状况,可用两个小桁架代替原桁架下弦杆,如图3-73b所示。此时桁架的反力和其余杆件的内力均不变。因为此时其余部分的平衡均能维持,而两小桁架在原荷载和约束力构成的平衡力系作用下也能保持平衡,所以上述构造改变后,其余部分的内力状态不变。

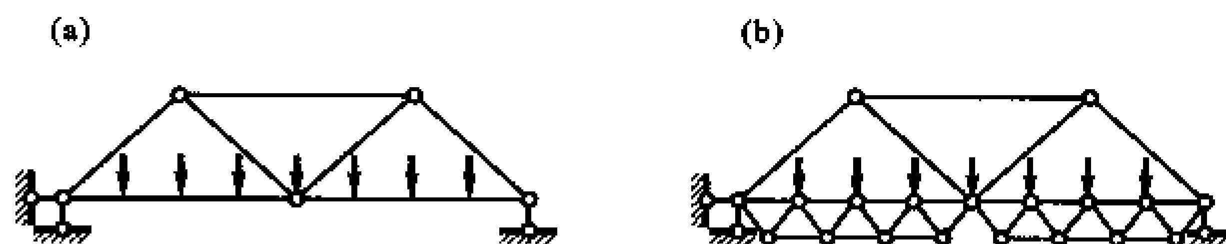


图　3-73

3-7-2　零载法

静定结构满足平衡条件解答的惟一性,可用于判定计算自由度 $W=0$ 的体系的几何构成属性。事实上,当体系的计算自由度 $W>0$ 时,则一定是几何可变的;当 $W<0$ 时,体系的几何可变性亦比较容易判定。但当计算自由度 $W=0$ 时,只是满足了体系几何不变的必要条件,而作为充分条件的两刚片和三刚片组成规则又无法解决有些复杂体系几何构成属性的判定问题。

计算自由度 $W=0$ 时,体系可能是几何不变的,即成为静定结构;也可能是几何可变的,则一般不能用作结构。既然静定结构满足平衡条件的解答是惟一的,若一个体系($W=0$)有两组或两组以上的内力能同时满足所有平衡条件,就一定是几何可变的。换言之,对于 $W=0$ 的体系,满足平衡条件的解是否惟一,是判定该体系是否几何不变的充分条件。

检查 $W=0$ 的体系满足平衡条件的解答是否惟一时,可以任取一种荷载形式,一般取荷载为零最方便,因而称为零载法。即对 $W=0$ 的体系当荷载为零时,若体系的反力和内力必定为零,则体系是几何不变的;若体系的部分反力和内力可以有非零值,则体系是几何可变的。

图3-74a、b所示体系的计算自由度 $W=0$,在荷载为零时可容易地判定所有杆件的内力必定为零,因此是几何不变的。图3-74c的体系两杆在一直线上,设两杆的轴力相等则可满足零荷载下的所有平衡条件;图3-74d的体系三根链杆相互平行,设中间杆受压,两侧杆受拉则可以满足零荷载下的所有平衡条件,因此这两种体系都是几何可变的。以上结论与先前采用两刚片或三刚片组成规则得出的结论完全相同。

由以上各例中可以看出，零载法的特点是将几何问题转化为静力问题处理，从而为分析 $W=0$ 的复杂体系的几何构造提供了一条新的有效途径。

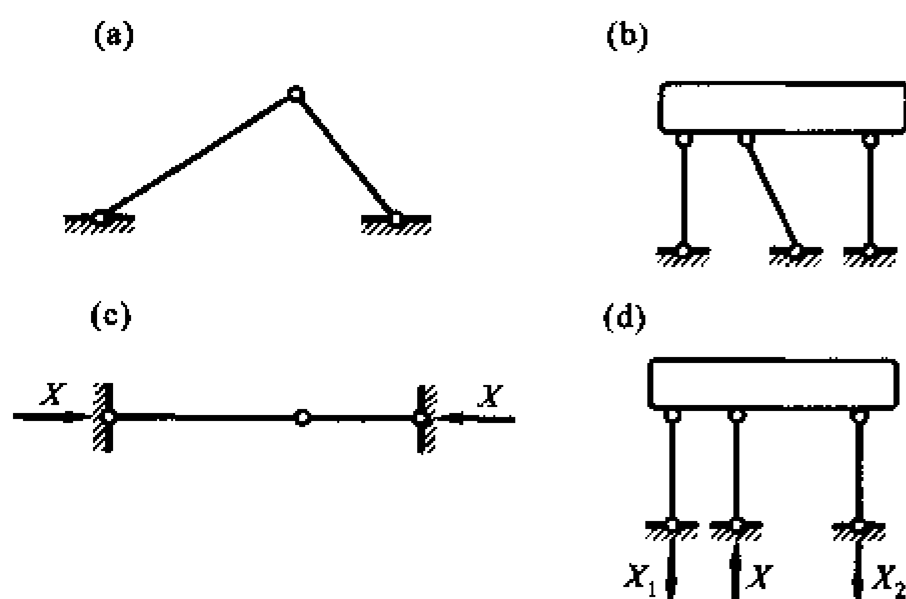


图 3－74

例 3－16 试用零载法证明图 3－75 所示组合拱桥结构的几何不变性。

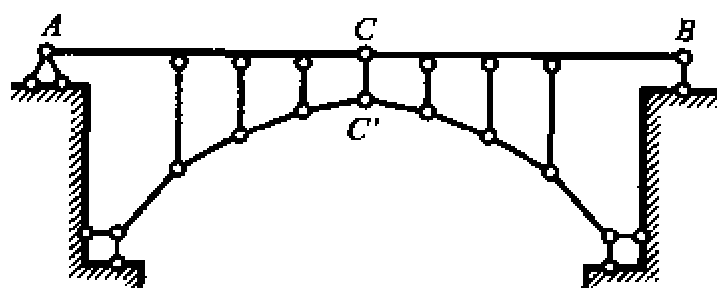


图 3－75

证 首先计算体系的计算自由度。桥面是由在 C 处铰结的两刚片 AC 和 CB 构成，拱链部分共包含 9 个铰，链杆和支杆约束的总数有 22 根，体系的计算自由度

$$W=2\times3+9\times2-1\times2-22=0$$

当无荷载作用时，若位于中央的 CC' 杆内力为零，则可依次根据两杆铰结点的平衡特性推知，体系中所有链杆均无内力存在，并进而可知桥面梁中亦无内力。为判定体系内力是否可能有非零解，先假定 CC' 杆受压，由 C' 铰的竖向平衡可知，与 C' 相连的其余两链杆必定也受压。因拱链中与各铰相连的三根链杆中，都有一根位于竖直方向，所以构成拱链的各杆内力的水平分力必定相同，而且均为受压。由此可推定 CC' 杆之外的所有竖向链杆也均受压力。这样，ACB 部分在零荷载条件下是无法平衡的。

若假定 CC' 杆受拉，按照同样的理由可推知体系无法满足平衡条件。由此就证明了当荷载为零时，体系的反力和内力必定为零。所以，图 3－75 所示的体系是几何不变的。

应用零载法同样可以证明，图 3－52 所示的悬吊式桥梁体系是几何不变的。

例 3－17 试用零载法判别图 3－76a 所示体系的几何构成属性。

解 该体系的计算自由度 $W=0$，但当荷载为零时，只能判定其中四根杆件为零杆（图 3－76b），但无法断定其余杆件的内力是否为零。

设左上斜杆受拉力 X，由平衡条件可以求得各链杆和支杆中的内力如图 3－76b 所示。这些反力和内力可以满足所有的平衡条件，说明体系在零荷载下可以有非零解存在，所以该体系是几何可变的。

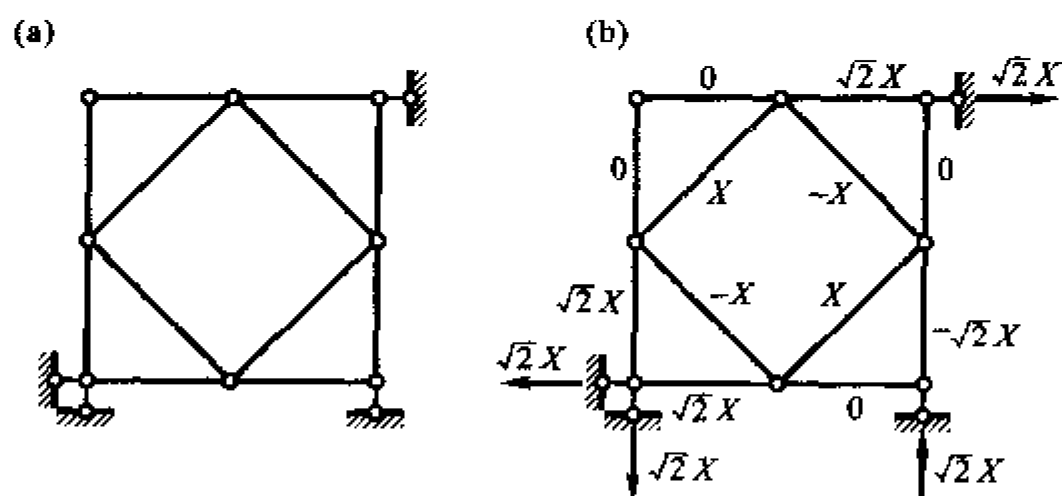


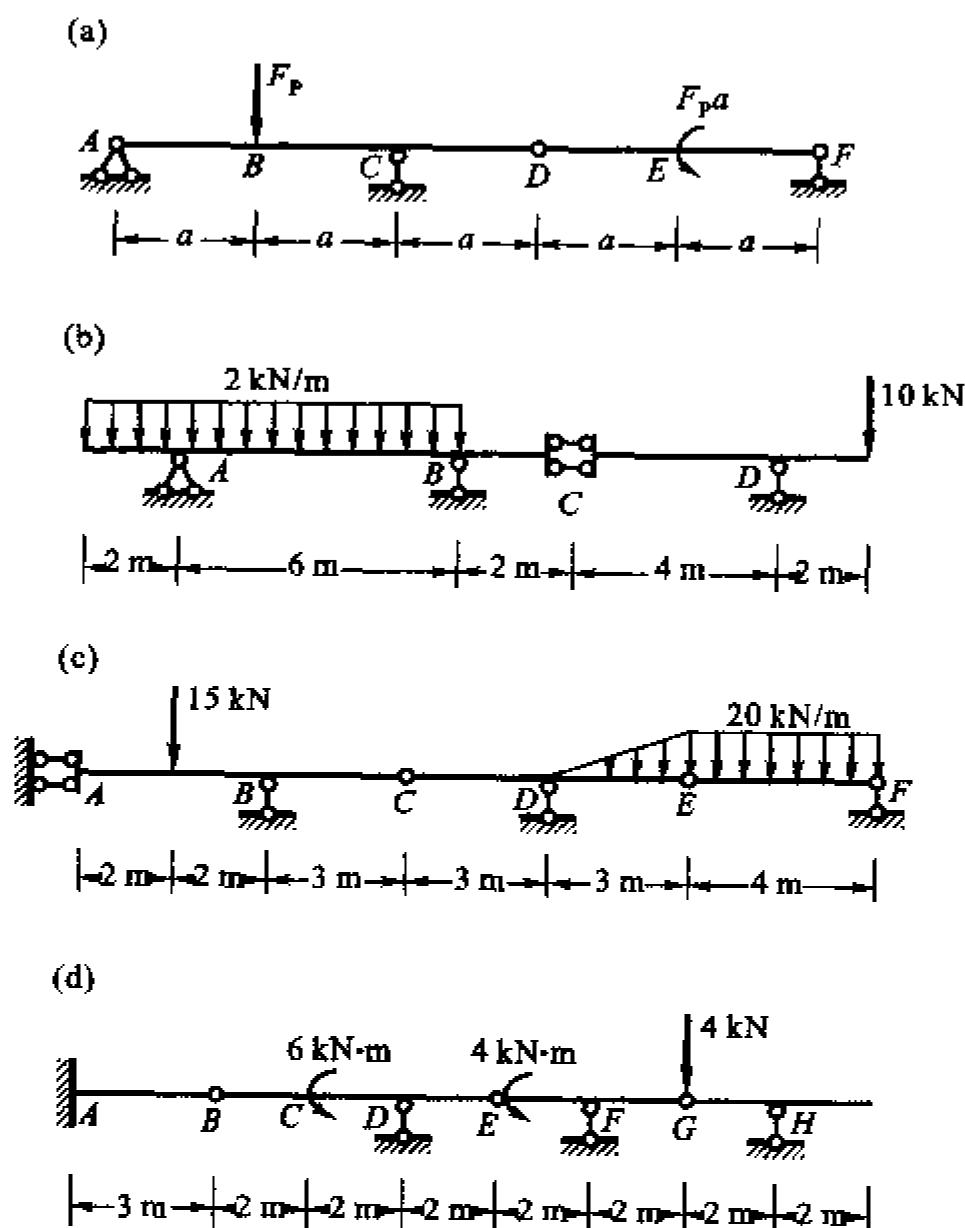
图　3－76

最后再强调一下的是，零载法只能适用于计算自由度 $W=0$（或只就体系内部 $W=3$）的体系。当 $W\neq0$ 时，因体系不具有满足平衡条件的惟一解，所以零载法也就不再适用。

习　　题

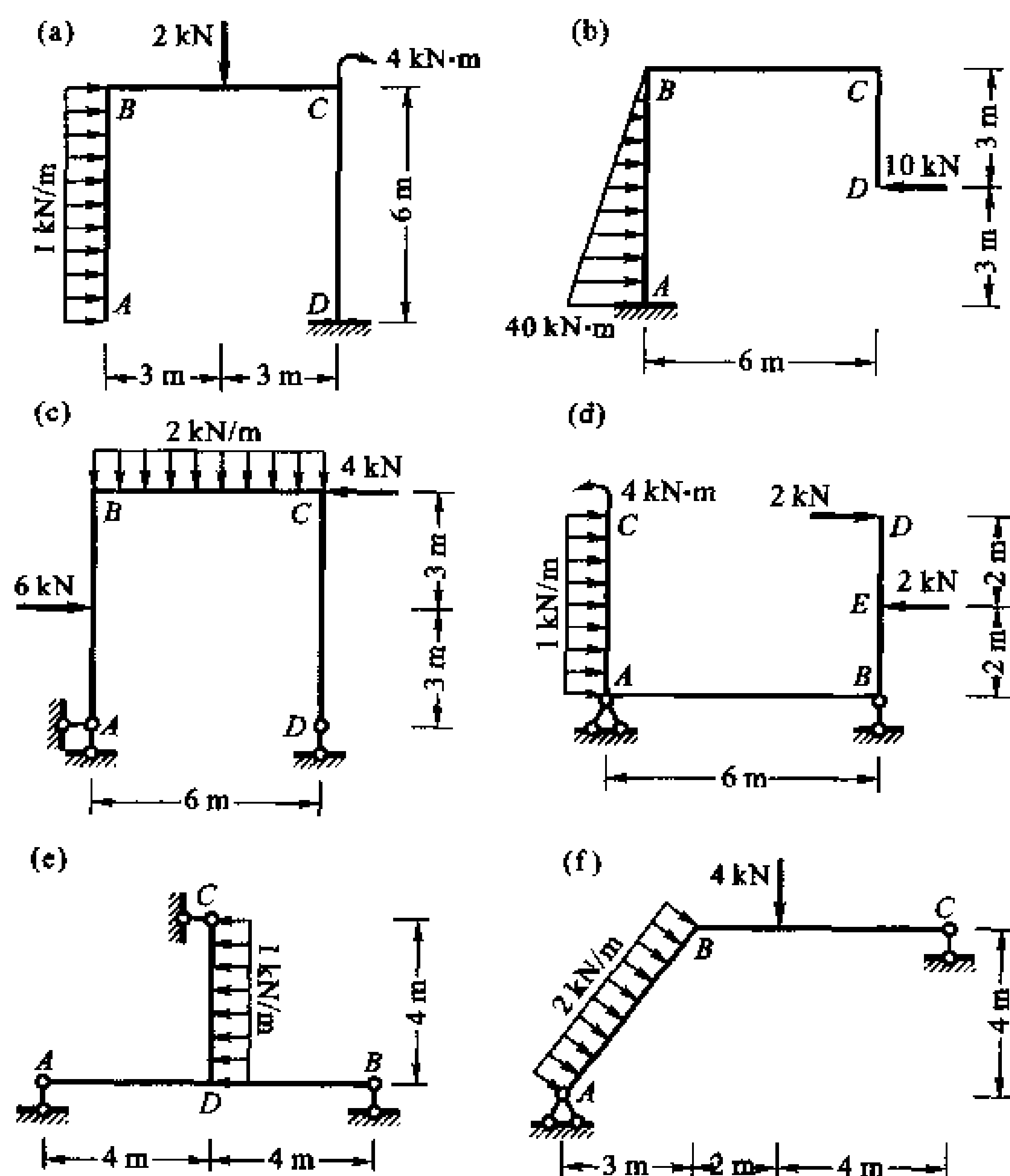
3－1　试回答：什么是静定结构的基本静力特性？静定结构的内力和反力与杆件的刚度是否有关？

3－2　试作图示多跨静定梁的弯矩图和剪力图。



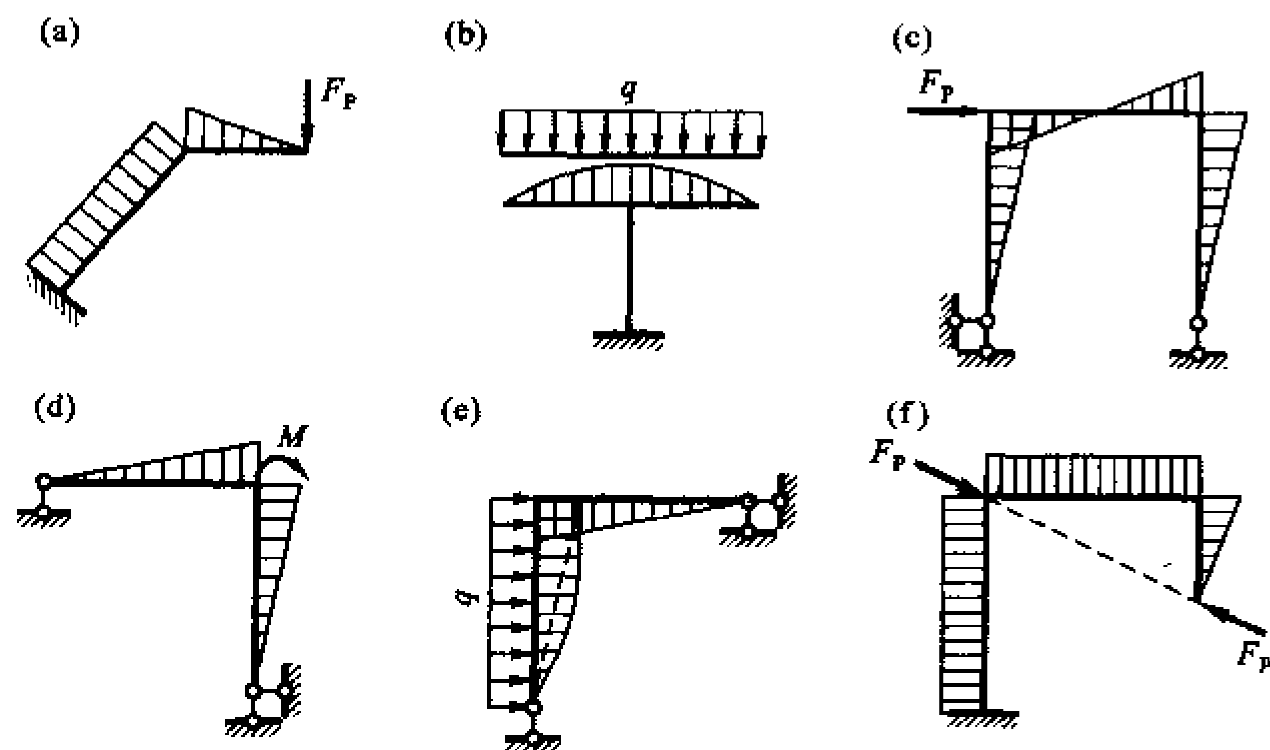
题3－2图

3－3　试作图示刚架的内力图。



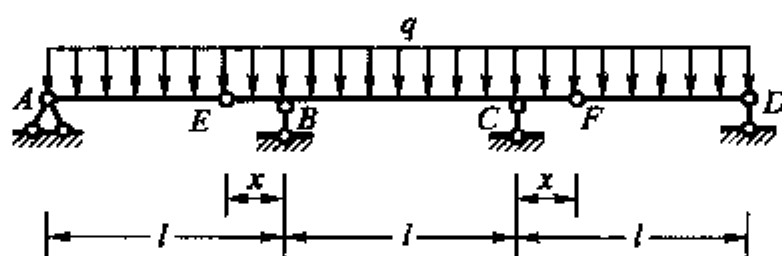
题 3－3 图

3－4　试找出下列各弯矩图形的错误之处，并加以改正。



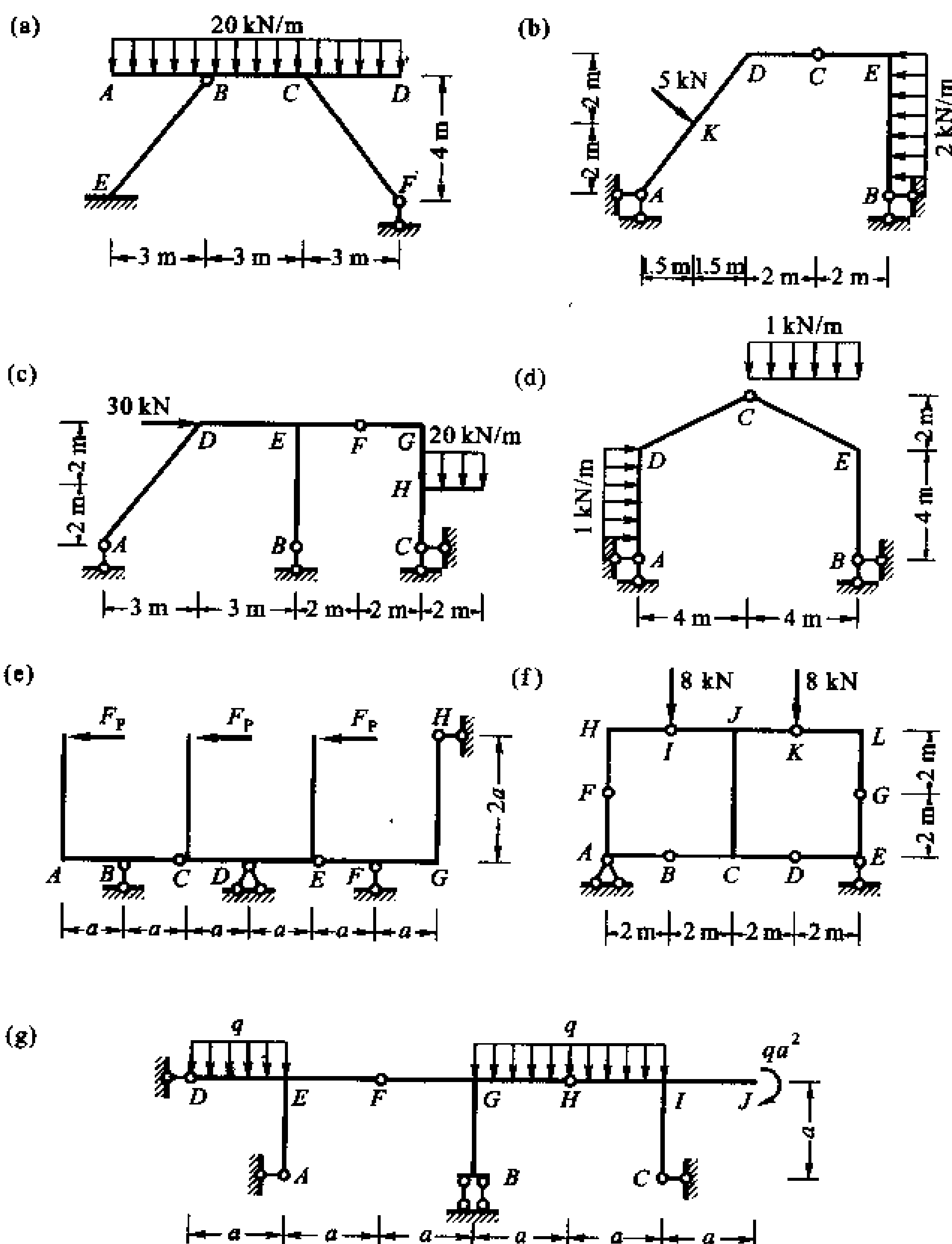
题 3－4 图

3-5 试按图示梁的 BC 跨跨中截面的弯矩与截面 B 和 C 的弯矩绝对值都相等的条件，确定 E、F 两铰的位置。



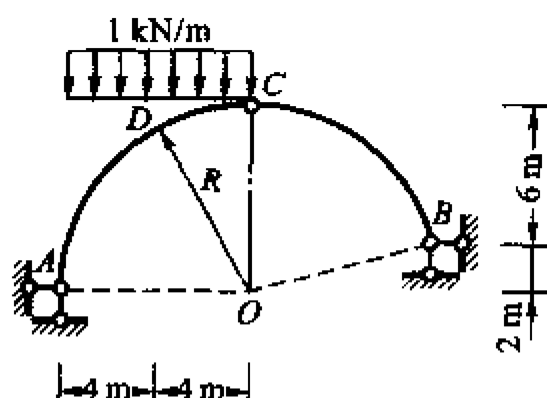
题 3-5 图

3-6 试作图示刚架的弯矩和剪力图。



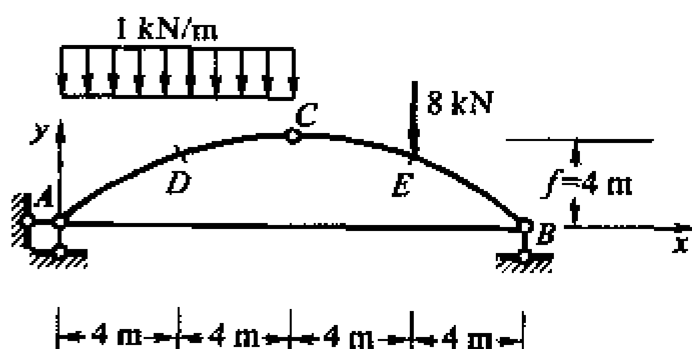
题 3-6 图

3-7 已知图示圆弧半径 $R=8$ m。试求圆弧形三铰拱的支座反力及 D 截面处的内力。



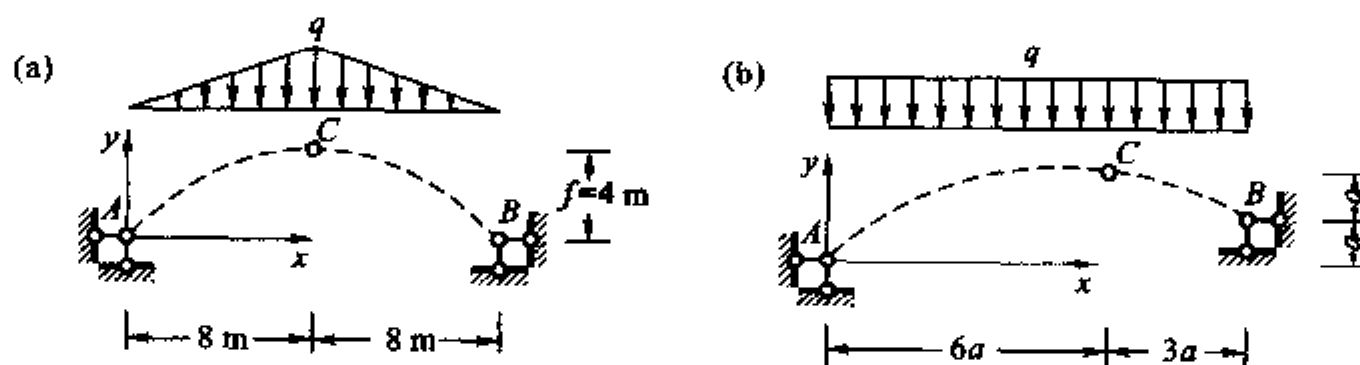
题 3-7 图

3-8 图示有拉杆三铰拱的拱轴线方程为 $y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$。试求截面 D 的内力 M_D、F_{QD}、F_{ND} 及 E 点左、右截面的剪力 F_{QE}^{L}、F_{QE}^{R} 和轴力 F_{NE}^{L}、F_{NE}^{R}。



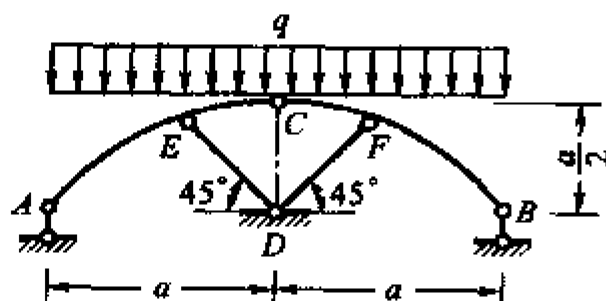
题 3-8 图

3-9 试求图示分布荷载作用下三铰拱的合理拱轴线方程。



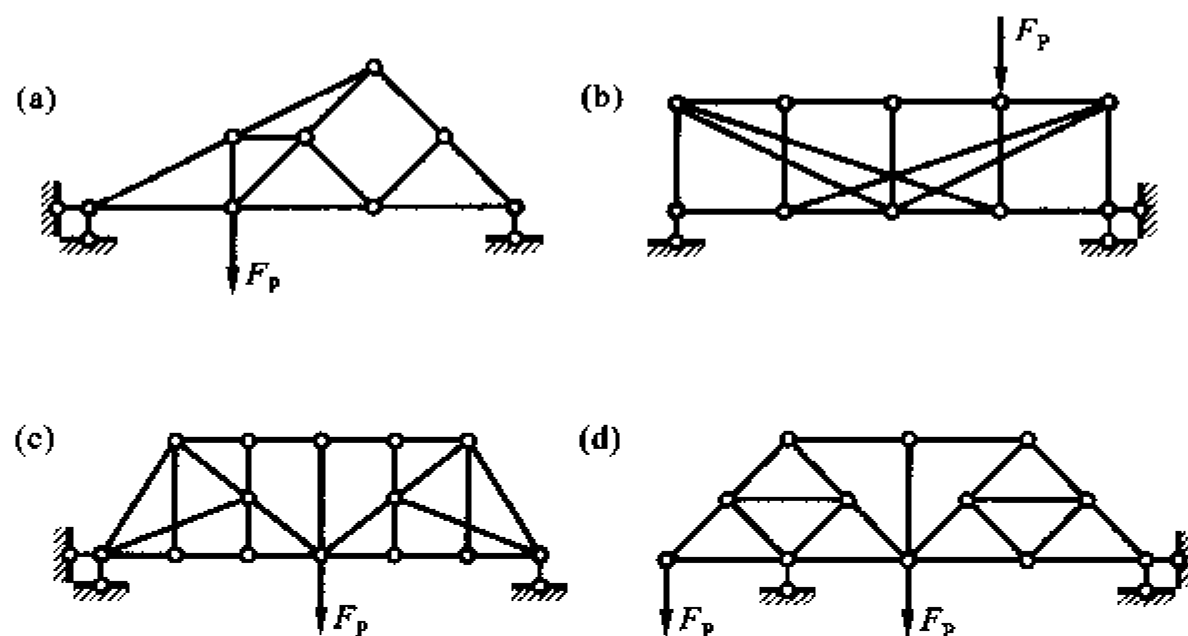
题 3-9 图

3-10 试求图示三铰拱的反力。



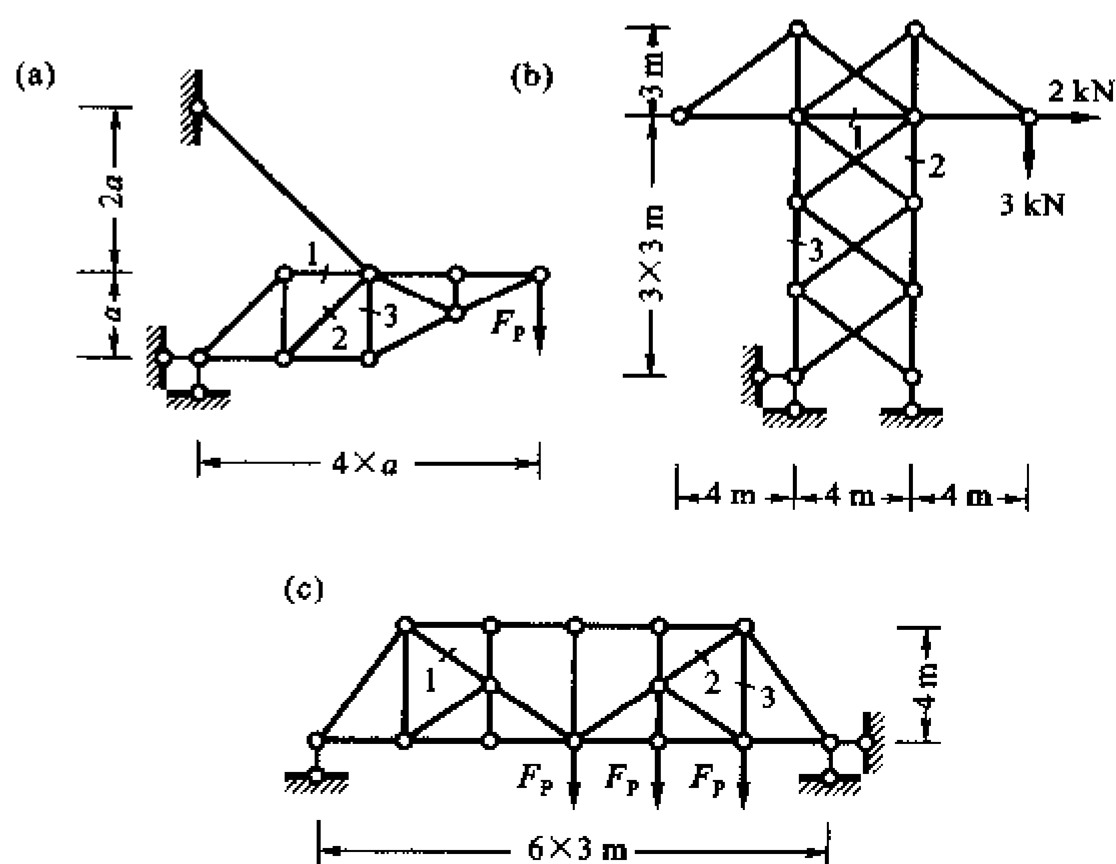
题 3-10 图

3-11 试指出图示桁架中的零杆。



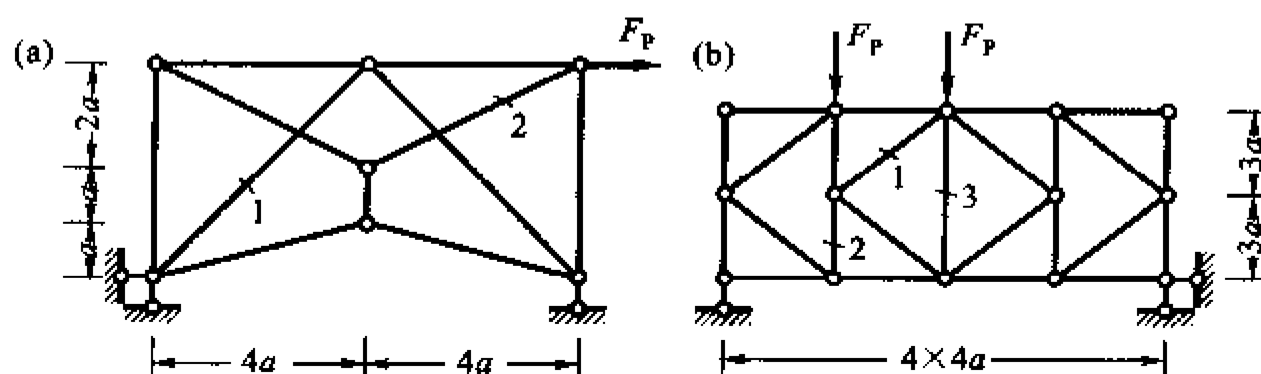
题3-11图

3-12 试求图示桁架各指定杆件的内力。



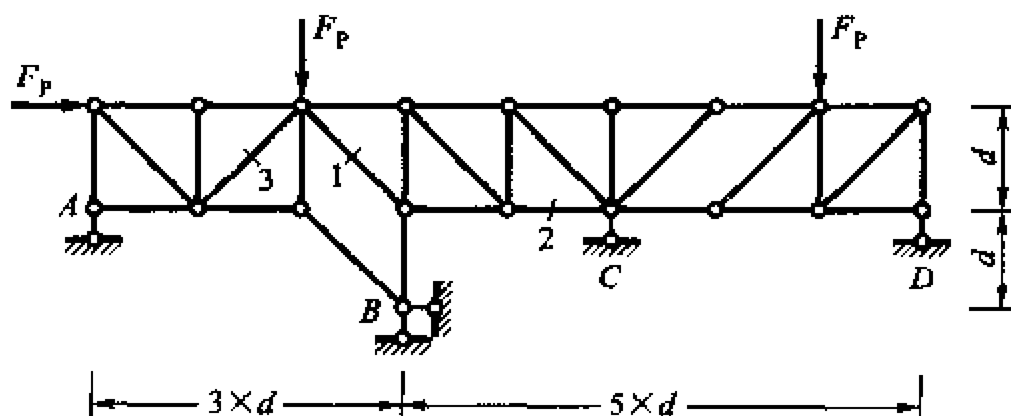
题3-12图

3-13 试选用两种途径求图示桁架各指定杆件的内力。



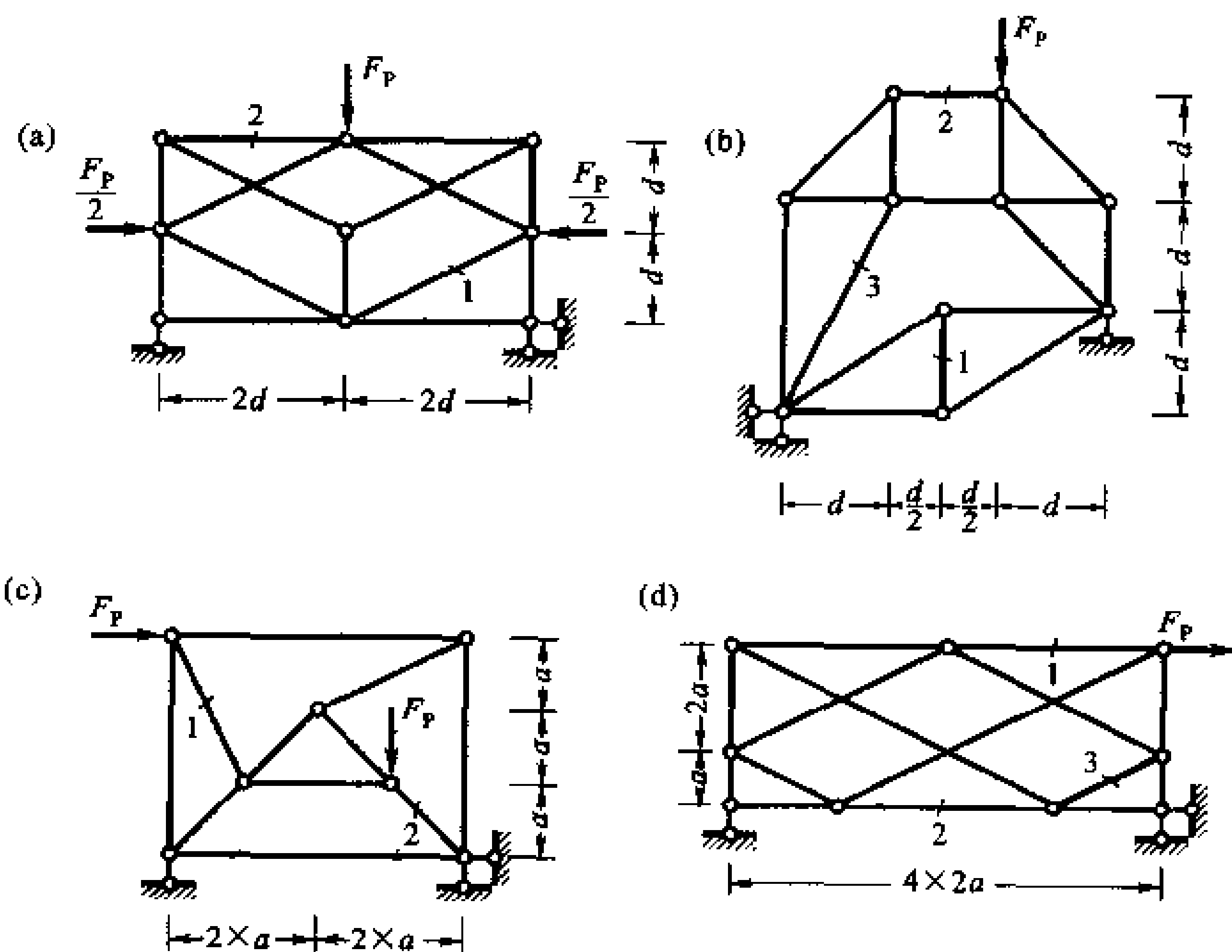
题3-13图

3-14 试选定求解图示桁架各指定杆件内力的合适步骤。



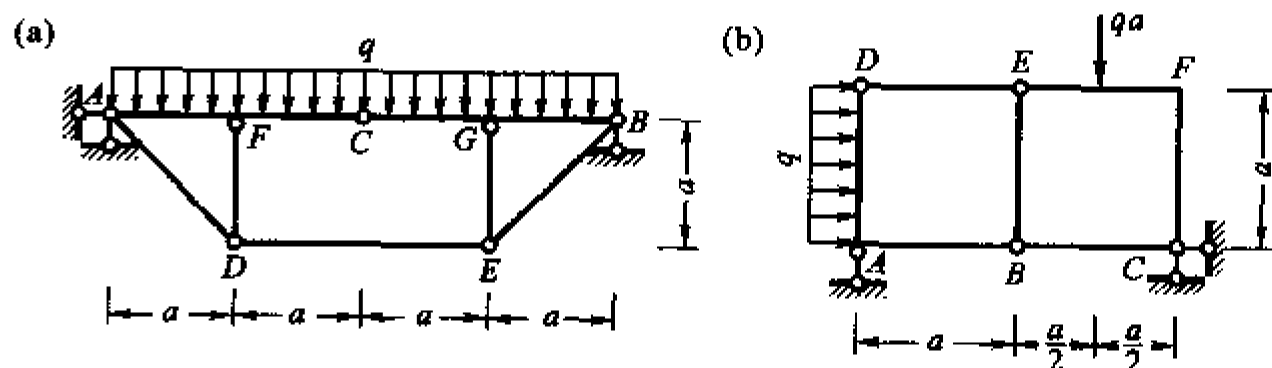
题 3-14 图

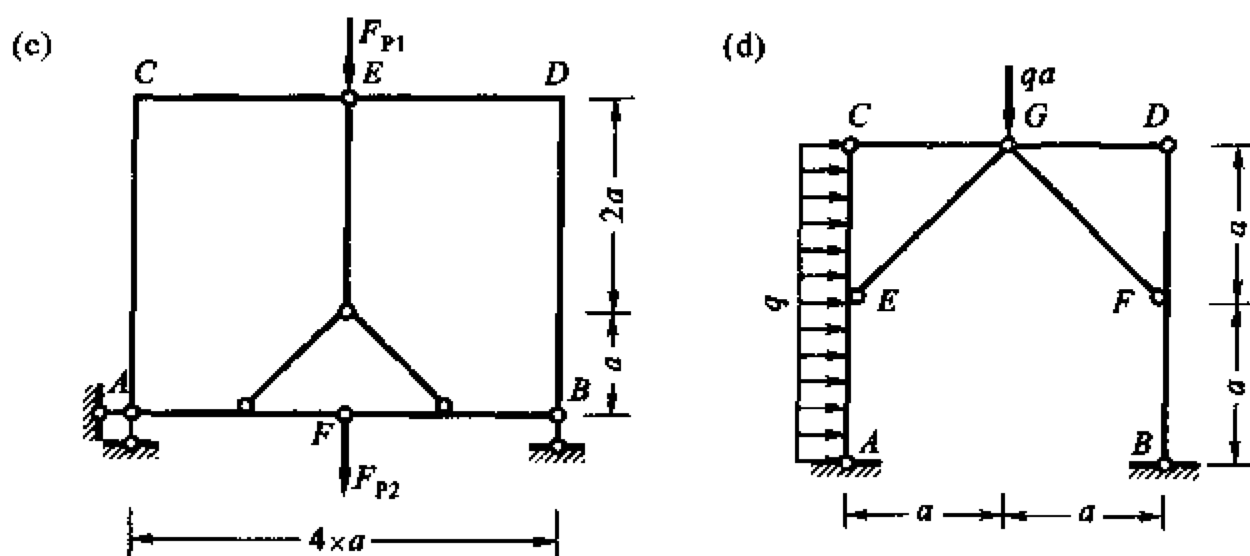
3-15 试求图示桁架各指定杆件的内力。



题 3-15 图

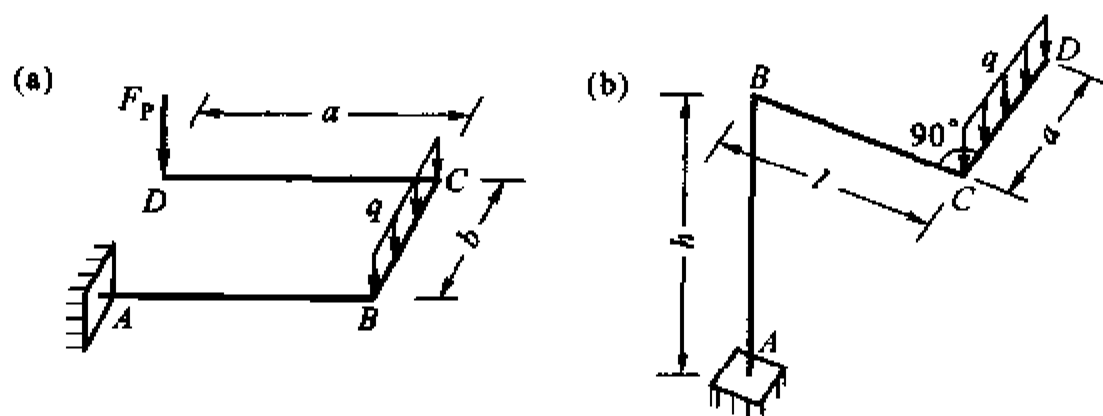
3-16 试作图示组合结构刚架杆件的弯矩图,并求链杆的轴力。





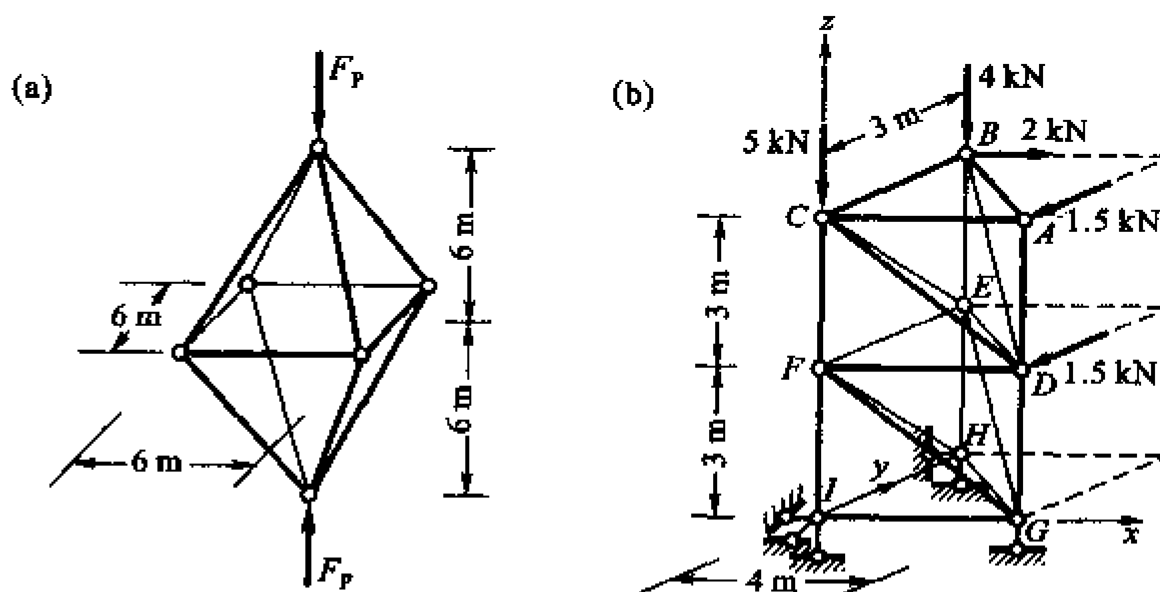
题 3－16 图

3－17　试作图示空间刚架的弯矩、扭矩和剪力图。



题 3－17 图

3－18　试求图示空间桁架杆件的内力。



题 3－18 图

3－19　试说明：静定结构有哪几项特性？静定结构因支座位移和温度变化引起的位移各有何特点？

3－20　试说明应用零载法分析体系几何构造的基本原理和使用前提。

第4章 静定结构的影响线

§4-1 移动荷载和影响线的概念

前面所讨论的静定结构受力分析问题中，结构所受的荷载不仅大小和方向不变，而且它们的作用位置也是固定的，这种性质的荷载在工程上称为恒载。结构在恒载作用下的受力状态通常是不变的。实际工程结构在承受恒载的同时还常受到各种活载的作用。例如，在桥梁上行驶的车辆荷载，厂房吊车梁上行驶的吊车荷载等移动荷载；又如房屋楼面上的人群、货物或非固定的设备等可以任意布置的分布荷载，都属于活载的范围。

所谓移动荷载一般是指荷载的大小和方向不变，而作用位置是在结构上移动的。结构在移动荷载作用下的受力状态将随荷载作用位置的不同而变化，包括结构的支座反力、内力和位移等都是在变化的。这样，就需要解决以下的新问题：

(1) 结构上某一量值(内力、反力或位移)随荷载作用位置变动时的变化规律。

(2) 确定使上述量值达到最大时移动荷载的作用位置，即该量值的最不利荷载位置，并求出相应的最不利值。

(3) 确定结构各截面上内力变化的范围，即内力变化的上限和下限。

以上第一条是基础，第二、三两条是进一步的应用，可为设计提供相应的依据。

移动荷载一般是由若干个大小和间距保持不变的竖向荷载所组成，此时就称为移动荷载组。图 4-1 所示简支梁 AB 上有车辆向右行驶，车辆的轮压可以表示为两个间距不变的竖向荷载 F_{P1} 和 F_{P2}，其位置可用其中某一荷载与梁 A 端的距离 x 表示。车辆向前行驶时，支座反力 F_{yA} 逐渐减小，而 F_{yB} 逐渐增大。此时，梁内不同截面处内力变化的规律也是各不相同的。即使是在同一截面处，不同内力的变化规律也不相同。因此，作为最基础的研究，可以从单一的移动荷载作用下给定截面上某种量值的变化规律开始，并且取荷载为单位荷载。

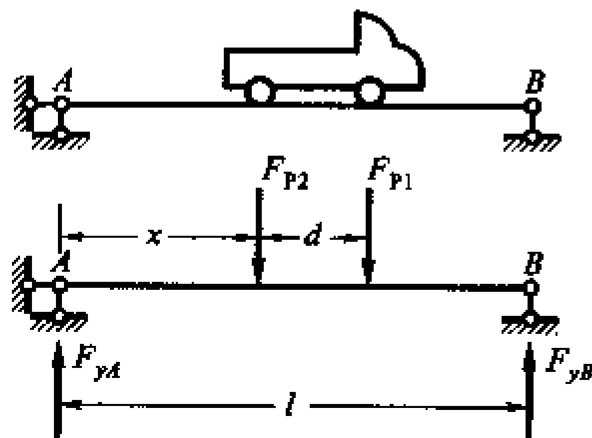


图 4-1

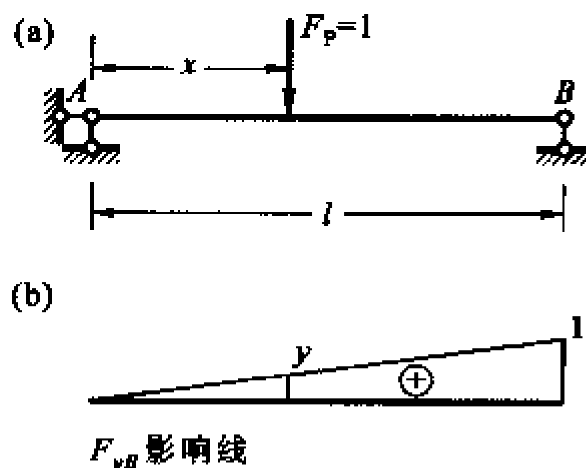


图 4-2

单位移动荷载作用下表示结构某一量值（称为影响量）变化规律的图形，就称为该量值的影响线。所谓单位荷载是数值和量纲均为1的量，它可以在实际移动荷载可到达的范围内移动。在求得了某一量值的影响线之后，就可以应用叠加原理，进而求得实际的移动荷载组所引起的该量值的变化规律。

现以图4-1梁为例，说明影响线的绘制过程。在图4-2a中以 x 表达单位移动荷载 $F_P=1$ 的作用位置。若需绘制 B 支座反力的影响线，可以通过改变荷载作用位置参数 x 来进行。显然，当 $x=0$ 时，$F_{yB}=0$；$x=l$ 时，$F_{yB}=1$；当 x 在 A、B 之间变化时，F_{yB} 是 x 的线性函数。于是，可以作出如图4-2b所示 F_{yB} 的影响线，它形象地表明了支座反力 F_{yB} 随单位荷载 $F_P=1$ 的移动而变化的规律。影响线图上的某一竖标 y 则表示 $F_P=1$ 作用于该处时，B 支座反力 F_{yB} 的值。

§4-2　静力法作影响线

所谓静力法，就是利用静力平衡条件首先列出某指定量值 S（代表某项内力或反力）随单位荷载 $F_P=1$ 作用位置的移动而变化的数学表达式，称为影响线方程，然后再按影响线方程作出量值 S 的影响线。

量值 S 的指定应根据工程问题分析的需要。现以图4-3a所示伸臂梁为例，介绍按静力法绘制反力、弯矩和剪力影响线的步骤。

设要绘制梁支座反力 F_{yA} 和 F_{yB} 的影响线。若取反力向上为正，由静力平衡条件可得影响线方程

$$F_{yA}=\frac{l-x}{l},\quad F_{yB}=\frac{x}{l}$$

它们都是荷载位置参数 x 的线性函数。由此可以作出 F_{yA} 和 F_{yB} 的影响线，如图4-3b、c所示。由于荷载 $F_P=1$ 量纲为1，所以反力影响线的量纲也为1。

设要绘制梁截面 C 处的弯矩影响线。若弯矩以使梁下边纤维受拉为正，当单位荷载 $F_P=1$ 在截面 C 以左移动时，由隔离体平衡条件可得

$$M_C=F_{yB}b=\frac{x}{l}b\quad(0\leqslant x\leqslant a)$$

可见在 AC 段 M_C 的影响线可以通过将反力 F_{yB} 影响线的竖标乘以 b 得到；当单位荷载在截面 C 以右移动时，则有

$$M_C=F_{yA}a=\frac{l-x}{l}a\quad(a\leqslant x\leqslant 5l/4)$$

即在 CD 段 M_C 的影响线可以通过将反力 F_{yA} 影响

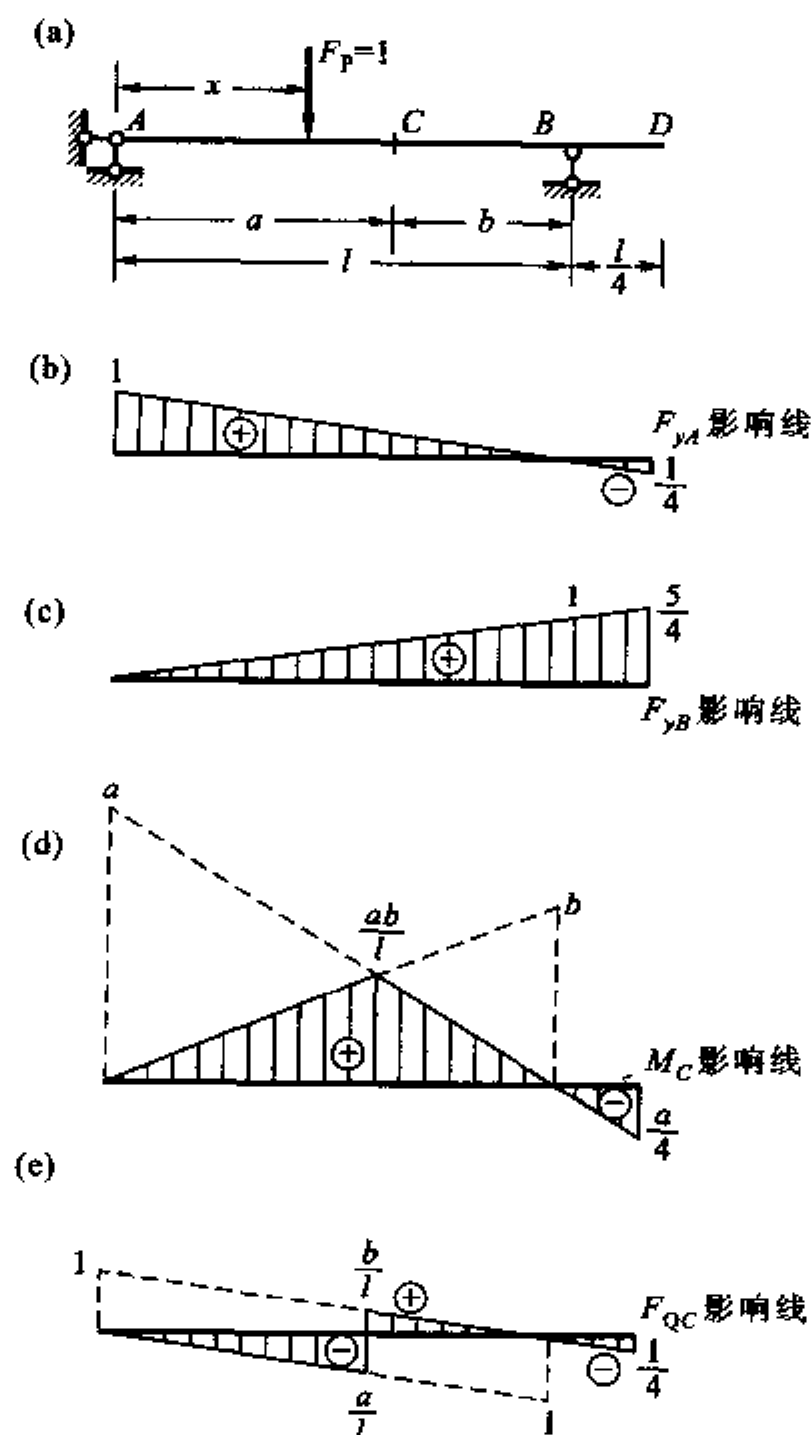


图　4-3

线的竖标乘以 a 得到。由此可以作出 M_C 的影响线如图 4-3d 所示。可见，M_C 的影响线在 C 点以左和以右对应不同的方程，C 点处影响线的竖标可以利用上述影响线方程中的任一个求得，为 ab/l。从几何关系看，M_C 影响线在截面 C 处的折角应等于 1。弯矩影响线的量纲应为长度的量纲。

设要绘制梁截面 C 处的剪力影响线，剪力的正向仍按材料力学中的规定，即使微段隔离体顺时针方向转动为正。当 $F_P=1$ 在截面 C 以左移动时，由隔离体平衡条件可得

$$F_{QC}=-F_{yB}=-\frac{x}{l}\quad(0\leqslant x\leqslant a)$$

可见在 AC 段 F_{QC} 的影响线只需将反力 F_{yB} 的影响线反号便可得到。当 $F_P=1$ 在截面 C 以右移动时，影响线方程应为

$$F_{QC}=F_{yA}=\frac{l-x}{l}\quad(a\leqslant x\leqslant 5l/4)$$

表明在 CD 段，F_{QC} 的影响线与反力 F_{yA} 的影响线相同。由此可以作出 F_{QC} 的影响线如图 4-3e 所示。显然，F_{QC} 的影响线是由两段相互平行的直线组成的，当移动荷载 $F_P=1$ 越过截面 C 时，F_{QC} 将发生突变，其突变值为 1。剪力影响线的量纲为 1。

以下讨论指定截面 C 位于梁的悬臂段时，弯矩和剪力影响线的绘制。为了方便起见，可以将荷载作用位置参数 x 的原点取在上述指定截面处，如图 4-4a 所示。

根据静力学原理可以判定，当荷载 $F_P=1$ 在梁 C 点以左移动时，截面 C 处的弯矩和剪力均为零；当 $F_P=1$ 在 C 点以右移动时，弯矩和剪力影响线方程分别为

$$M_C=-x,\quad F_{QC}=1$$

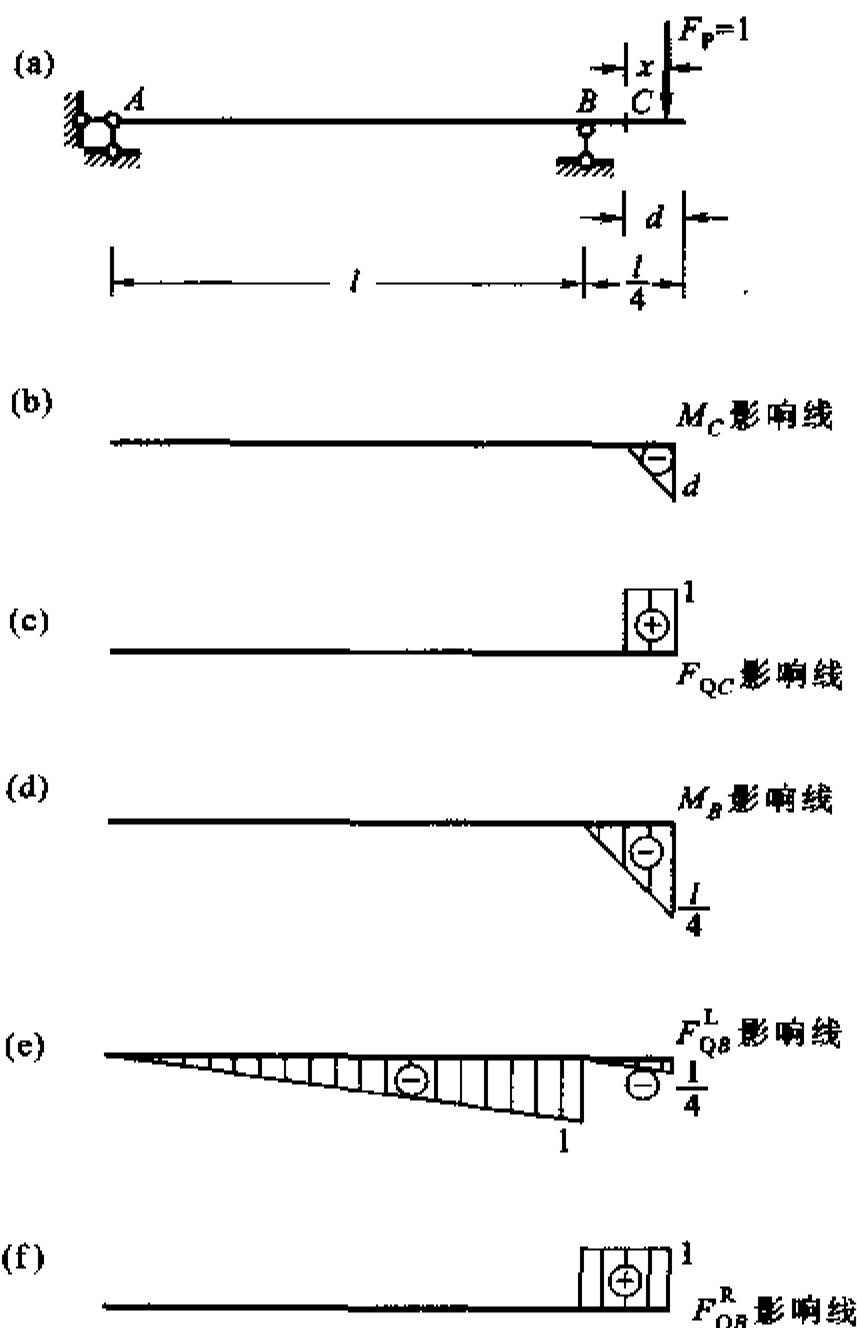


图 4-4

由此可作出截面 C 的弯矩和剪力影响线如图 4-4b、c 所示。如果指定截面取在支座 B 处，绘制 M_B 的影响线时只需在 M_C 影响线中取 $d=l/4$ 即可得到，如图 4-4d 所示。对于支座截面处的剪力影响线，因在支座处剪力会发生突变，所以必须按支座以左和以右两个截面分别绘制，其剪力可分别记为 F_{QB}^L 和 F_{QB}^R。F_{QB}^L 的影响线可以在图 4-3e 中使截面 C 趋近于 B 点而得到；F_{QB}^R 的影响线可以在图 4-4c 中使截面 C 趋近于 B 点而得到，分别如图 4-4e、f 所示。

例 4-1　试用静力法作图 4-5a 所示梁的反力 F_{yB} 和弯矩 M_C 的影响线。

解　先作反力 F_{yB} 的影响线。由整体平衡条件 $\sum F_y=0$ 得

$$F_{yB}=1$$

即 $F_P=1$ 作用在梁上任何位置时 F_{yB} 恒等于1，于是 F_{yB} 的影响线如图4-5b所示为一水平线。

在作弯矩 M_C 的影响线时，取支座 A 为坐标原点，有

$$M_C=\begin{cases}F_{yB}a=a & (0\leqslant x\leqslant 2a)\\ M_A=3a-x & (2a\leqslant x\leqslant 4a)\end{cases}$$

由此可以作出 M_C 的影响线如图4-5c所示。

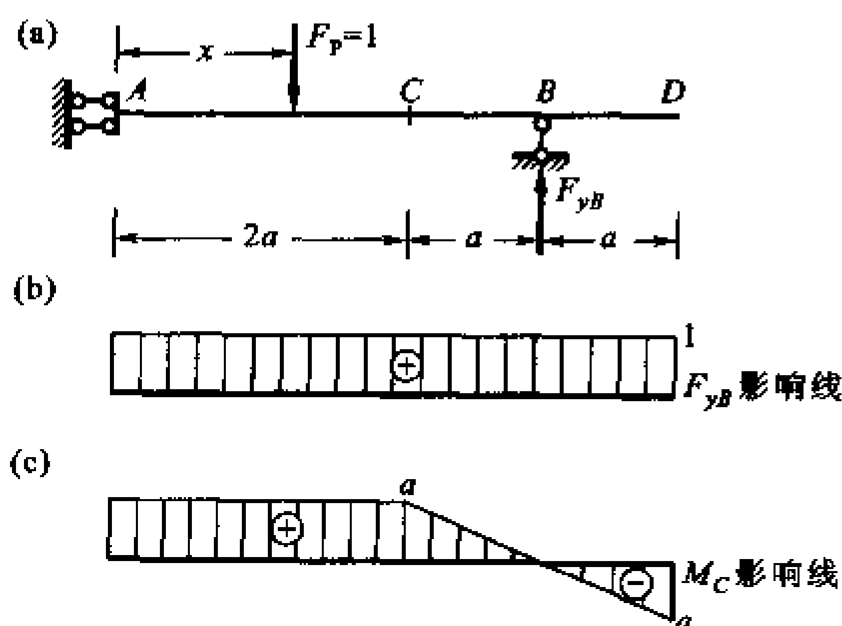


图　4-5

例4-2　试用静力法作图4-6a所示结构撑杆 AC 的轴力 F_{NAC} 和梁上内力 F_{QE}^{L}、F_{QE}^{R} 和 M_D 的影响线。

解　取 F 点为坐标原点，坐标 x 向左为正，可得支座 A 和 B 的竖向反力

$$F_{yA}=\frac{x}{4d},\quad F_{yB}=1-\frac{x}{4d}$$

因撑杆 AC 和 AE 倾角相等，由 CEF 杆 $\sum F_x=0$ 可知 $F_{NAC}=F_{NAE}$。再由 A 结点平衡条件 $F_y=0$ 可求得

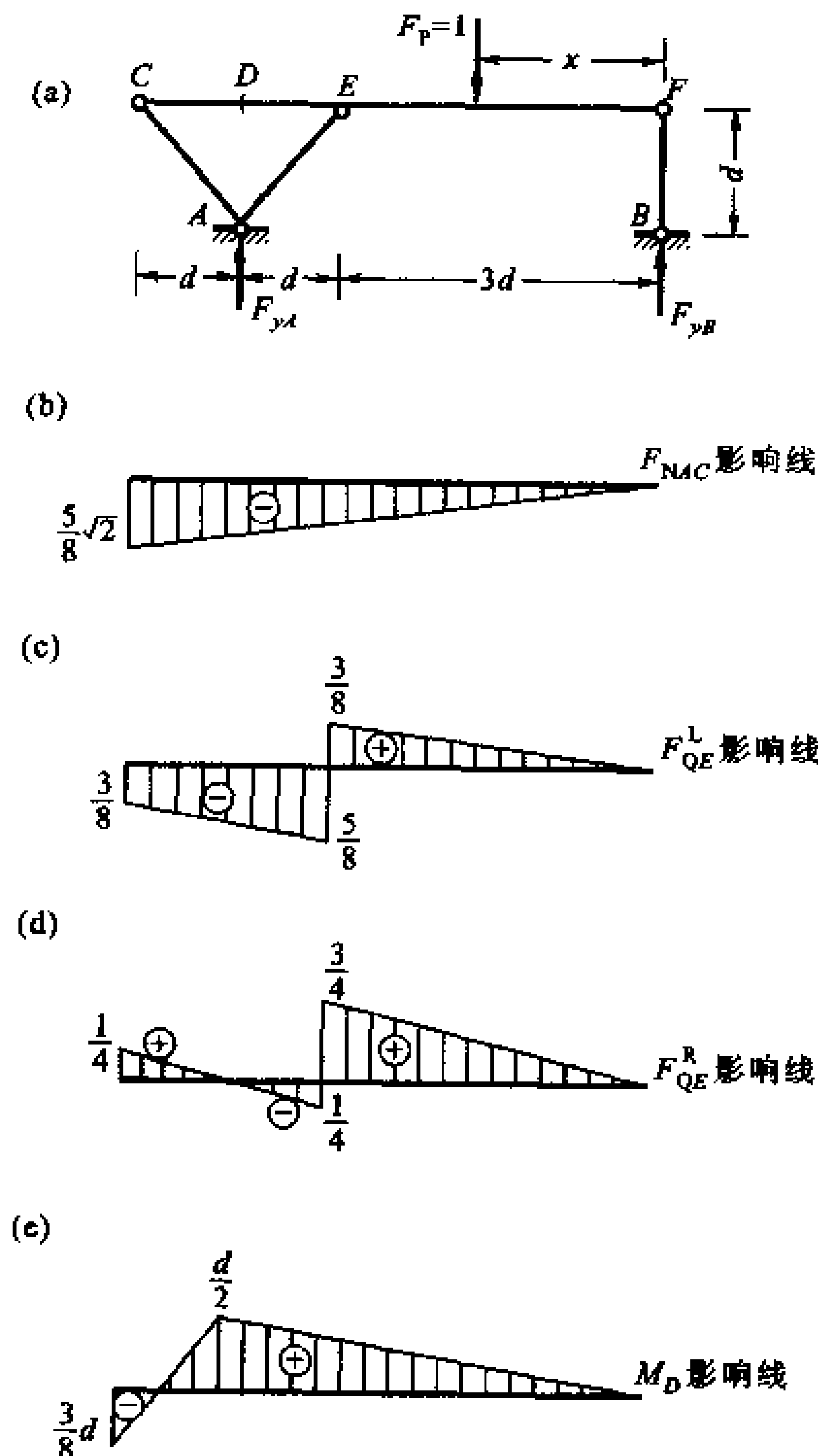


图　4-6

$$F_{NAC}=-\frac{\sqrt{2}}{2}F_{yA}=-\frac{\sqrt{2}x}{8d}\quad(0\leqslant x\leqslant 5d)$$

据此可进而求得以下影响线方程：

$$F_{QE}^{L}=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}F_{NAC}=\dfrac{x}{8d} & (0\leqslant x<3d)\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}F_{NAC}-1=\dfrac{x}{8d}-1 & (3d<x\leqslant 5d)\end{cases}$$

$$F_{QE}^{R}=\begin{cases}F_{yA}=\dfrac{x}{4d} & (0\leqslant x<3d)\\ -F_{yB}=\dfrac{x}{4d}-1 & (3d<x\leqslant 5d)\end{cases}$$

$$M_{D}=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}F_{NAC}d=\dfrac{x}{8} & (0\leqslant x\leqslant 4d)\\ F_{yB}\times 4d-\dfrac{\sqrt{2}}{2}F_{NAE}d=4d-\dfrac{7x}{8} & (4d\leqslant x\leqslant 5d)\end{cases}$$

按以上影响线方程可分别作出各影响线如图 4-6b、c、d 和 e 所示。

例 4-3　试用静力法作图 4-7a 所示桁架 a、b、c 三杆的内力影响线，设移动荷载可分别作用于桁架的上弦或下弦。

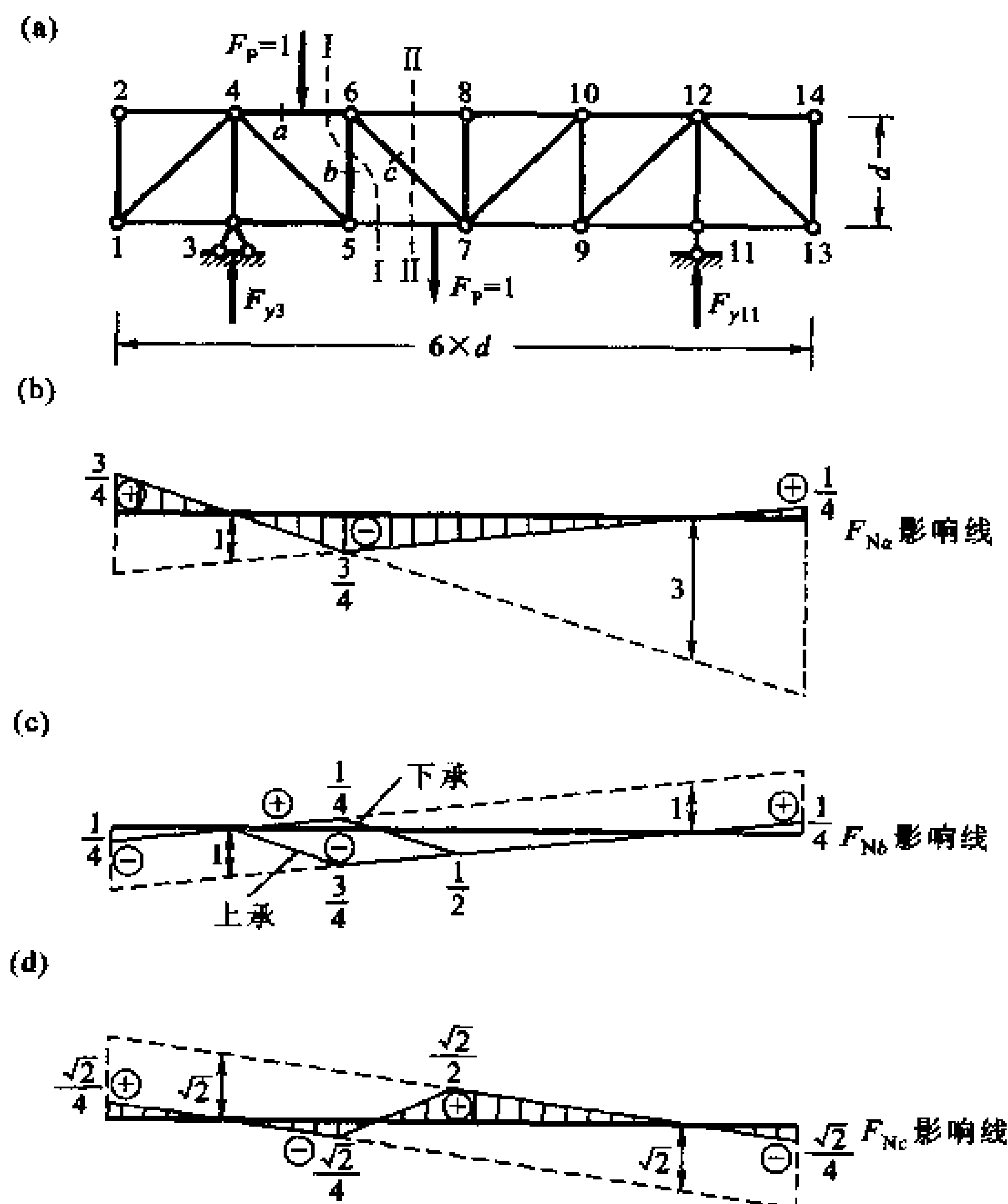


图　4-7

解　先绘制移动荷载作用于桁架上弦时的影响线。桁架支座反力 F_{y3}、F_{y11} 的影响线容易求得，分别与相应伸臂梁的支座反力影响线相同。桁架的内力可以通过其支座反力表达。作截面Ⅰ－Ⅰ，分别由截面左部和右部隔离体的力矩平衡方程 $\sum M_5=0$ 得

$$F_{Na}=\begin{cases}-3F_{y11} & F_P=1\ 位于结点\ 4\ 以左\\ -F_{y3} & F_P=1\ 位于结点\ 6\ 以右\end{cases}$$

取 $\sum F_y=0$ 得

$$F_{Nb}=\begin{cases}F_{y11} & F_P=1\ 位于结点\ 4\ 以左\\ -F_{y3} & F_P=1\ 位于结点\ 6\ 以右\end{cases}$$

作截面Ⅱ－Ⅱ，分别由截面左部和右部隔离体取 $\sum F_y=0$ 得

$$F_{Nc}=\begin{cases}-\sqrt{2}F_{y11} & F_P=1\ 位于结点\ 6\ 以左\\ \sqrt{2}F_{y3} & F_P=1\ 位于结点\ 8\ 以右\end{cases}$$

按照以上内力表达式，并注意到在桁架相邻结点之间影响线均为线性变化，就可以利用桁架的支座反力影响线作出各内力影响线分别如图4－7b、c、d所示。同理，可作出移动荷载作用于桁架下弦时的各内力影响线。

由图中可见，当移动荷载分别作用于桁架的上或下弦时，F_{Na}、F_{Nc} 的影响线相同，但 F_{Nb} 的影响线是有差异的。

§4－3　机动法作影响线

机动法是绘制影响线的另一种方法，它的理论依据是虚功原理。根据理论力学中的刚体系虚功原理，刚体系在力系作用下处于平衡时，在任何可能的无限小的位移中，力系所作功的总和为零。这种任何可能的无限小位移称为虚位移，而力系在虚位移上所作的功称为虚功。应用机动法可以将绘制静定结构内力和反力影响线的静力学问题转化为求作位移图的几何学问题，绘制过程一般十分快捷。

以下仍以伸臂梁为例，介绍如何按机动法绘制影响线。设要绘制图4－8a所示梁支座反力

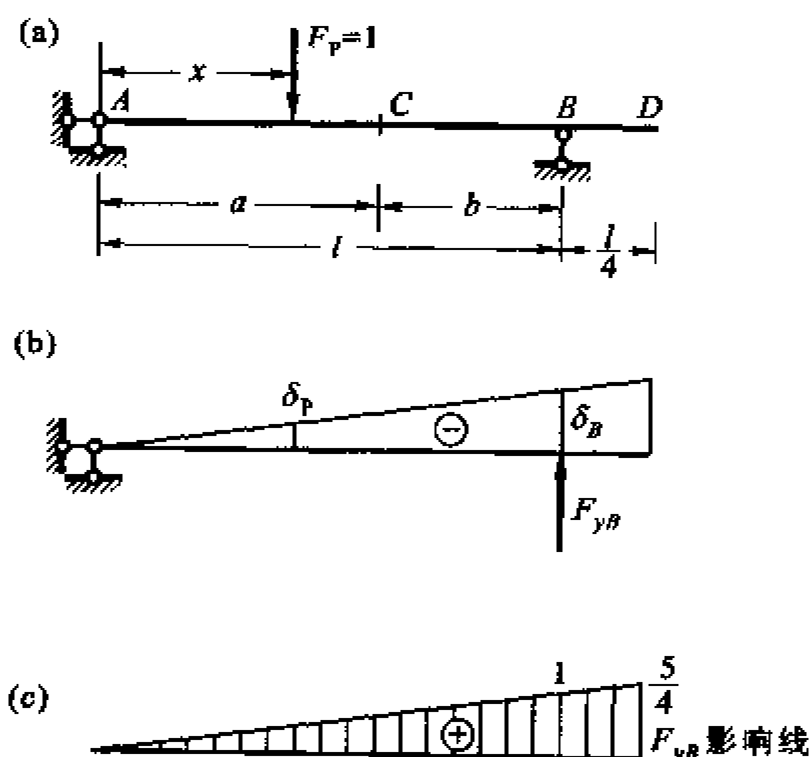


图　4－8

F_{yB}的影响线，可先将与F_{yB}相应的支座链杆撤除，代之以支座反力F_{yB}。此时，体系仍处于平衡状态，但原先的静定结构已转化为具有一个自由度的机构。现使上述机构顺着F_{yB}的正方向发生虚位移如图4-8b所示，并以δ_B和δ_P分别表示梁B点处和移动荷载$F_P=1$作用点处的虚位移。δ_B取与所求量值F_{yB}方向一致为正；δ_P取与单位荷载$F_P=1$方向一致为正，此时可列出虚功方程

$$1\times\delta_P+F_{yB}\times\delta_B=0$$

由此可得

$$F_{yB}=-\frac{\delta_P}{\delta_B}$$

当单位荷载$F_P=1$移动时，δ_P的值是变化的，其变化规律就如图4-8b的机构虚位移图所示。若使$\delta_B=1$，则有

$$F_{yB}=-\delta_P$$

上式表明，只需将$\delta_B=1$时虚位移图中的δ_P改变符号，即取方向向上为正，就可得到所求量值F_{yB}的影响线，于是可作出F_{yB}的影响线如图4-8c所示。

下面讨论用机动法作梁内力的影响线。设要绘制图4-8a所示伸臂梁M_C的影响线，应将与M_C相应的联系撤除，即在C截面处插入一个铰，并以一对大小等于M_C的力矩代替原有联系中的作用力，如图4-9a所示。然后使上述机构顺着M_C的正方向发生一虚位移，此时可列出虚功方程

$$1\times\delta_P+M_C\times(\alpha+\beta)=0$$

得

$$M_C=-\frac{\delta_P}{\alpha+\beta}$$

式中$\alpha+\beta$为铰C处杆件的折角，即与M_C相应的广义位移。若使$\alpha+\beta=1$，并注意将表达了δ_P的机构虚位移图改变符号，即可得到M_C的影响线如图4-9b所示。影响线图中的竖标可以按照几何学原理求得。

设要绘制梁截面C剪力F_{QC}的影响线，则应在C截面撤除与F_{QC}相应的联系，即在C处插入一个滑动铰，并以F_{QC}代替原有联系中的作用。然后，使上述机构顺着F_{QC}的正向发生虚位移如图4-9c所示。由于组成滑动铰的两根等长链杆和两侧的刚片在机构运动中必定保持为平行四边形，因此在虚位移图中AC_1与C_2B必定是平行的。与上述虚位移相应的虚功方程为

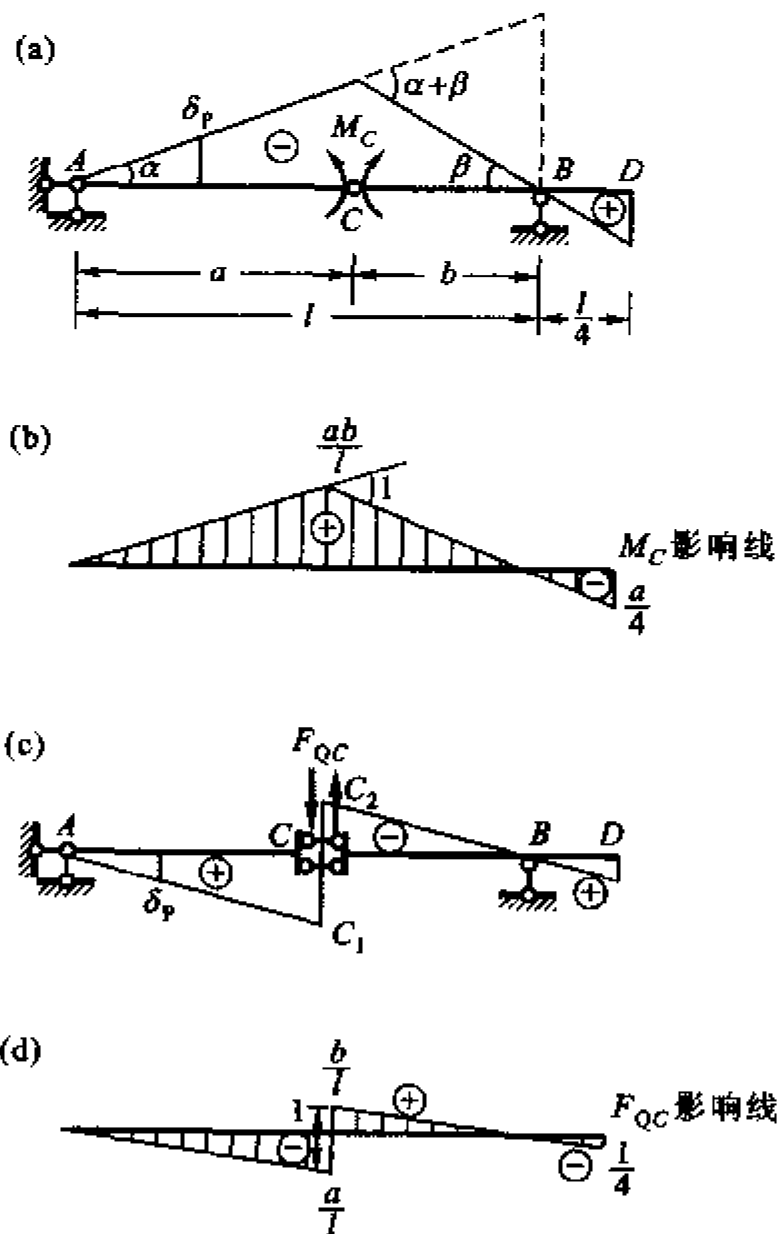


图 4-9

$$1\times\delta_P+F_{QC}\times(CC_1+CC_2)=0$$

得

$$F_{QC}=-\frac{\delta_P}{CC_1+CC_2}$$

式中 CC_1+CC_2 为 C 点两侧截面的竖向相对线位移，即与 F_{QC} 相应的广义位移。若使 $CC_1+CC_2=1$，并按与前同样的理由将机构虚位移图改变符号，即可得到 F_{QC} 的影响线如图4-9d所示。图中影响线的竖标同样可以按照几何学原理求得。

综上所述，用机动法作静定结构内力和反力的影响线时，首先需撤除与所求内力或反力 S 相应的约束，并代以原内力或反力 S。此时原结构变为具有一个自由度的机构，并且仍处于平衡状态。然后，使该机构顺着 S 的正方向发生单位虚位移，在此过程中只有 S 和单位移动荷载作虚功，单位移动荷载所作的虚功就等于其作用点沿 $F_P=1$ 方向的位移值 δ_P；而 S 所作的虚功就等于 S 本身。于是，由虚功方程可知，S 的影响线就是改变符号后的 δ_P 图，即相应机构中承载杆（移动荷载 $F_P=1$ 所作用的杆）的虚位移图。这样，绘制 S 影响线的静力学问题就转化为求作相应机构位移图的几何学问题。

用机动法作静定结构内力和反力影响线的步骤可简单地归纳为十四字的口诀："求何撤何代以何；沿何吹气位移1"。即对撤除了与所求量值 S 相应约束的平衡机构施加微量干扰，使其沿 S 发生单位位移，此时的机构位移图即为 S 的影响线。这里，用了"吹气"两字是因为对于处于平衡状态的理想机构来说，任何微小的干扰都可以使其发生位移。这种位移并非是由所求内力或反力的作用引起，也不需要外加有限量值力的作用，所以是一种机构的刚体位移。由此也可以推得：静定结构内力和反力的影响线都是由直线段构成的。

在运用机动法时还应当注意，静定结构在撤除一个约束后可能只是在局部形成机构，而其余部分仍然保持为几何不变。几何不变的部分在机构运动时并不会发生位移，这表明了当移动荷载 $F_P=1$ 作用于该部分时，所求量值 S 将保持为零。例如，在用机动法作图4-4伸臂梁 M_B 和 F_{QB}^R 的影响线时，撤除相应约束后形成的体系在 AB 段仍保持几何不变，机构刚体运动将如图4-10a、b所示。由此得到的 M_B 和 F_{QB}^R 影响线与采用静力法时相同。当单位荷载在 AB 段移动时，M_B 和 F_{QB}^R 的值将保持为零。

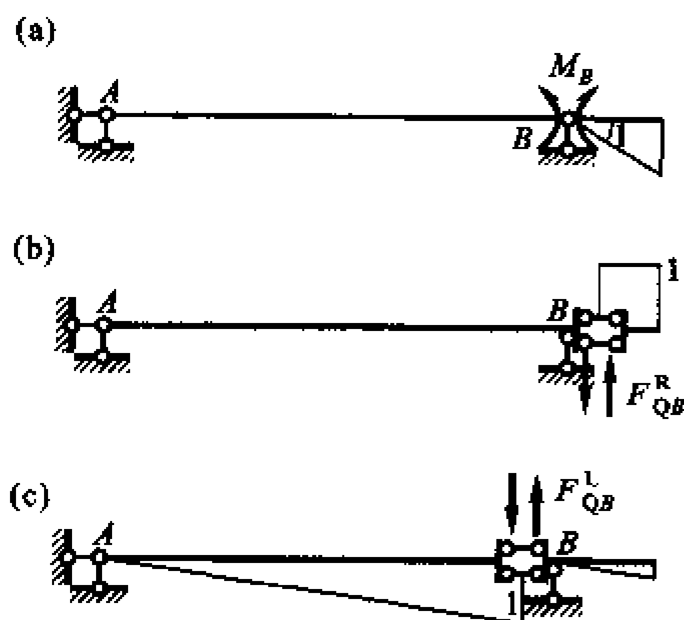


图　4-10

在按机动法的要求撤除约束和作机构位移图时，一是要注意保留未被撤除的约束，二是要熟悉机构运动的几何特征。例如在用机动法求上述伸臂梁 F_{QB}^L 的影响线时，应将滑动铰插入 B 支座的左侧，注意在发生机构运动时 B 点无竖向位移，而滑动铰两侧的杆件又必须保持平行，因此机构的刚体运动就只能如图4-10c所示，由此得到 F_{QB}^L 的影响线如图4-4e所示。

例4-4　试用机动法作图4-11a所示多跨静定梁 M_K、F_{QK}、F_{QB}、F_{QC}^L、F_{yF} 和 M_J 的影响线。

解　按照"求何撤何代以何；沿何吹气位移1"的机动法作影响线口诀，可方便地绘制出各影响线如图4-

11b、c、d、e、f、g 所示。在作机构虚位移图时应注意到几何不变部分不会发生位移；在作 F_{QB} 的影响线时，需将 B 点处原铰联结的竖向约束撤除，即改为水平单链杆约束（图 4－11d）。

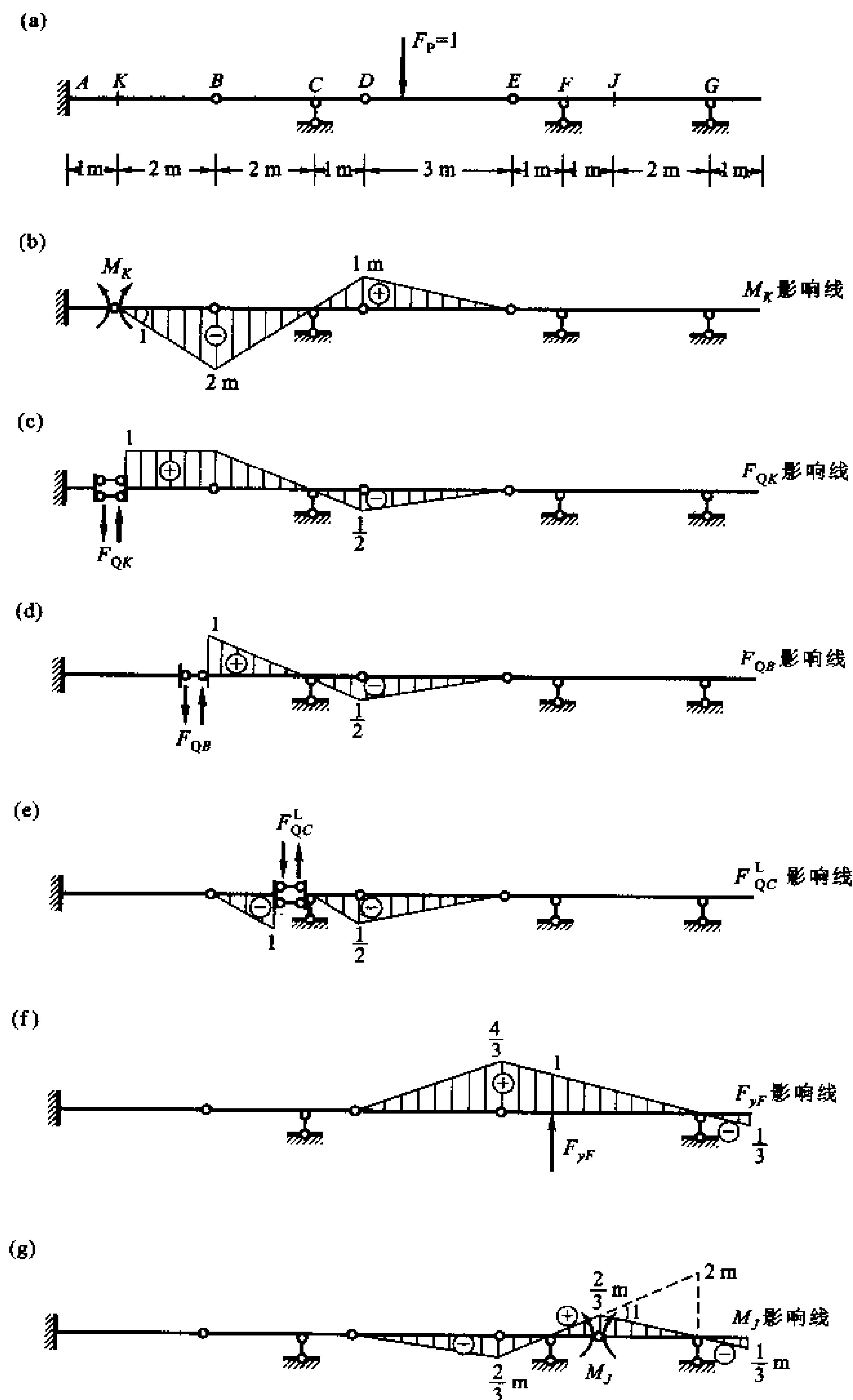


图　4－11

实际结构的移动荷载有时并非是直接作用在主梁上，而是如图 4－12a 所示作用在纵向次梁上，通过横梁支座再将荷载传递到主梁上。这就是所谓的间接荷载或称结点荷载。以下就讨论间接荷载作用下影响线的绘制问题。在按照机动法绘制此类结构主梁内力和反力的影响线时，虚功方程依然是不变的，影响线仍是对应承载杆（次梁）的机构虚位移图，只是需注意此时单位荷载作用点的位移 δ_P 与相应的主梁位移一般不完全相同。不难想象，无论主梁机构如何位移，简支于横梁上的纵向次梁应保持为直线。于是，只要将移动荷载直接作用于主梁时的影响线按横梁之间直线相连的原则略加修改，就可以得到间接荷载作用下相应的影响线。

例 4－5　试用机动法作图 4－12a 所示梁在间接荷载作用下 M_K、F_{QK}、F_{QC}^{L} 和 F_{yF} 的影响线。已知横梁的间距均为 2 m。

解　本例中主梁受间接的移动荷载作用，主梁的形式仍与例 4－4 中相同，但此时影响线图形的范围应是移动荷载可以抵达的范围，即自 A 点至 I 点。采用机动法时首先如例 4－4 分别作出相应的直接荷载作用下的影响线（A 至 H），然后将横梁之间为折线的区段改用直线相连，并将图形拓长至 I 点，最后根据几何关系确定控制竖标。所求得的各影响线如图 4－12b～e 所示。

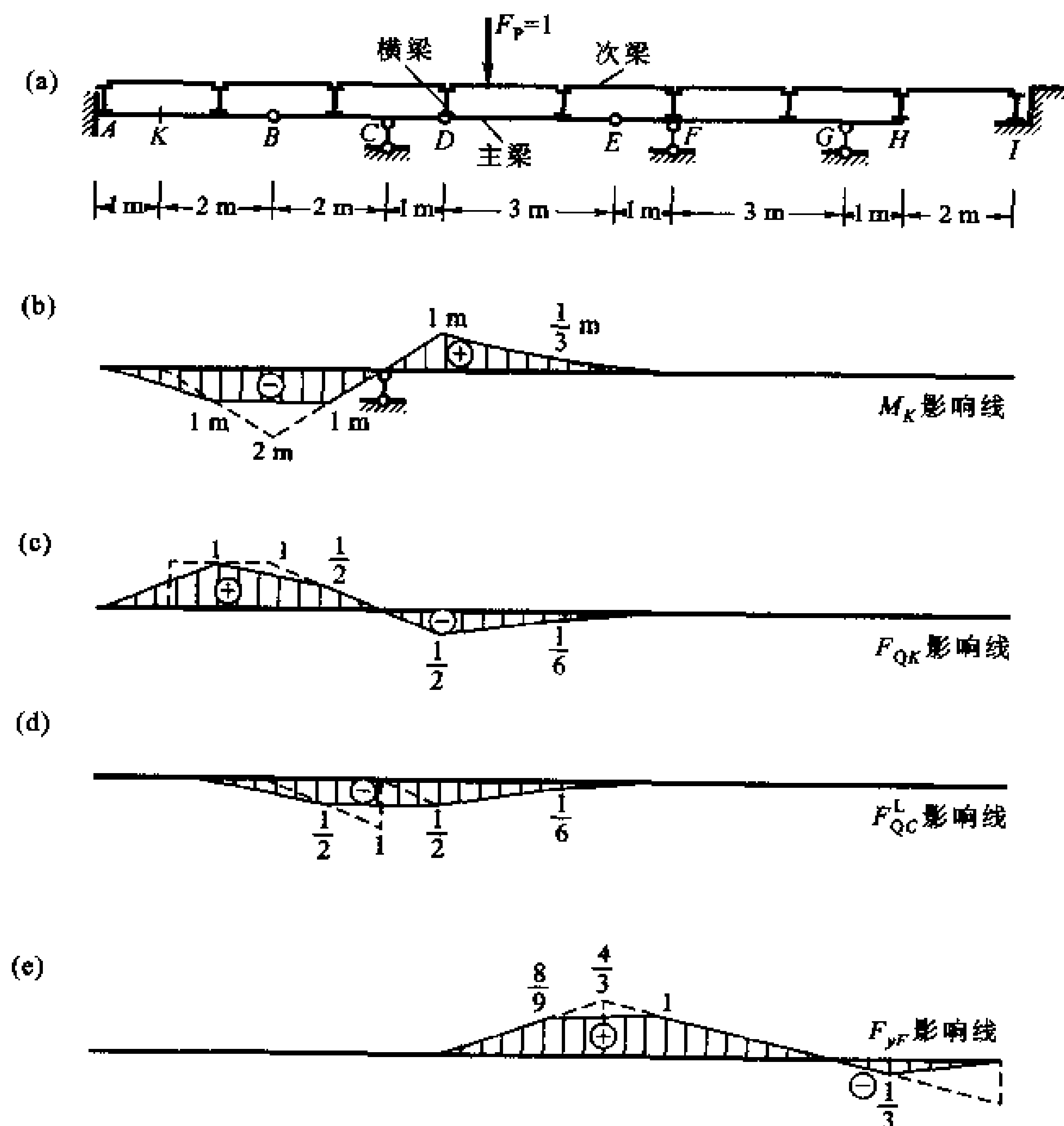


图　4－12

例 4－6　试用机动法作图 4－13a 所示刚架在 AE 杆上作用移动水平荷载时 M_{DA}、M_C 和 F_{QC} 的影响线。

解　本例的特点是移动水平荷载作用。由虚功方程可知，δ_P 应取承载杆 AE 的水平位移。对于刚架杆件的

弯矩应先设定正向，可以刚架内侧受拉为正；剪力的正向规定不变。在用机动法作 M_{DA}、M_C 和 F_{QC} 的影响线时，仍可按照“求何撤何代以何，沿何吹气位移 1”的口诀求得相应的机构虚位移图如图 4-13b、c、d 所示。在作图 4-13b 的机构虚位移图时应注意将铰插入 D 结点的下侧，此时由于 AD 杆和 B 支座竖向链杆的作用，横梁只能平移而不会发生转动；在作图 4-13c、d 的机构虚位移图时，应注意图形分别具有对称和反对称的特性。

有了以上的机构虚位移图，就可方便地作出 M_{DA}、M_C 和 F_{QC} 的影响线如图 4-13e、f、g 所示。本例中移动荷载是沿水平方向作用的，所以 δ_P 是指承载杆 AE 的水平位移。此外，影响线只需作在与承载杆 AE 相应的竖向基线上，而不必画出整个结构。实际上，作机构的虚位移图也只是绘制影响线的一种手段，方法熟练以后也可以凭借对机构运动的直觉直接画出影响线。

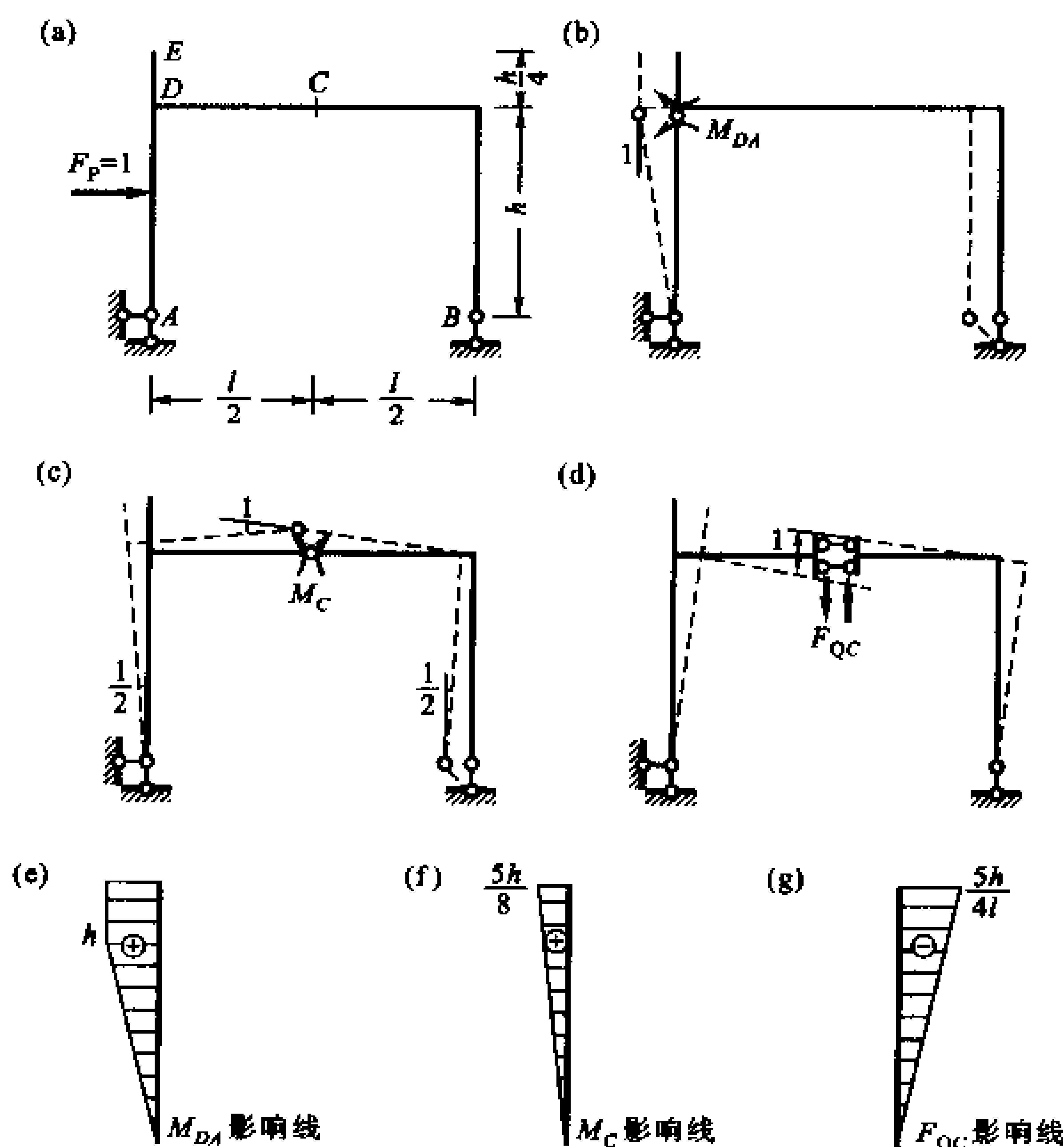


图　4-13

§4-4　联合法作影响线

联合法是指将机动法和静力法联合运用的一种方法。对于比较复杂的静定结构来说，在用静力法绘制影响线时涉及的影响线方程较多，而且每一个方程各有其适用的起止范围，影响线的整体图形往往不能迅速形成，绘制过程也比较费时；若用机动法绘制，虽然影响线的整体图形能由机构虚位移图迅速得出，但当机构在几何上比较复杂时，影响线的竖标常不易求得。联合法就是结合以上两种方法的优点来解决影响线绘制问题，即先运用机动法迅速确定所求量值影响线

的图形特征，再运用静力法确定图形上控制点的竖标，从而顺利地完成较复杂静定结构影响线的绘制。

例4-7　试绘制图4-14a所示桁架中杆1、2、3的轴力F_{N1}、F_{N2}和F_{N3}的影响线。设荷载沿下弦移动。

解　现按联合法绘制桁架杆件的内力影响线。桁架杆件的轴力以受拉为正。

先按机动法分别将所求轴力的杆件切断，并代以原轴力。此时，原静定桁架的某一结间会形成机构，但其余部分仍保持内部几何不变，可视为刚片，如图4-14b、c和d中阴影部分所示。在发生机构虚位移时，刚片部分的位移应保持为一直线，并且在支座结点处桁架下弦杆应无竖向位移，由此便可按机动法迅速获得相应影响线的图形特征。然后，根据两点可确定一条直线的几何学原理，在作F_{N1}影响线时，只需用静力法求出$F_P=1$作用于G点时杆1的轴力，此即F_{N1}影响线在G点的竖标值；在作F_{N2}的影响线时，可用静力法求出$F_P=1$作用于B、C两点时杆2的轴力，即F_{N2}影响线在B、C两点的竖标值；在作F_{N3}的影响线时，局部机构是一个铰结平行四边形，其机构运动特征与滑动铰相同，可先求出$F_P=1$作用于D点时杆3的轴力，绘出局部机构以左段的影响线图形，再过F点作左段图形的平行线得到局部机构以右段的影响线图形，最后在局部机构区段用直线相连。由此便可作出F_{N1}、F_{N2}和F_{N3}的影响线如图4-14e、f、g所示。

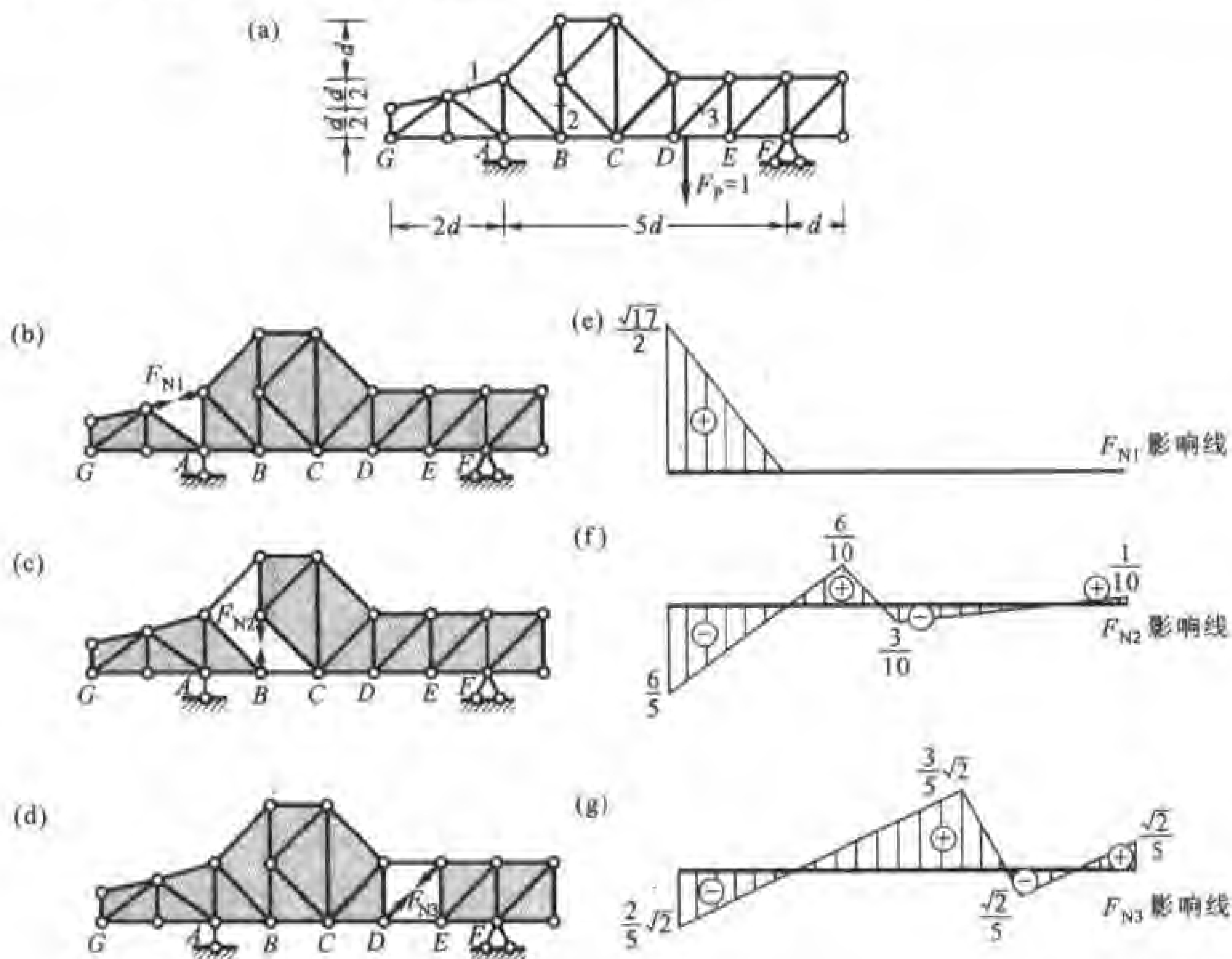


图　4-14

例4-8　试绘制图4-15a所示结构A支座水平反力F_{xA}和M_{DC}的影响线。

解　设F_{xA}以向右为正，M_{DC}以杆件下侧受拉为正。

绘制F_{xA}的影响线时，先撤除A支座水平链杆，代以反力F_{xA}。在使机构的A点向右发生单位水平位移时，EC、CG和GI杆应分别保持为直线，并且CG杆应与GI杆互相平行。由静力学原理可知，当$F_P=1$分别作

用于 F 点、G 点左侧和 H 点时 $F_{xA}=0$，相应影响线的竖标值为零；当 $F_P=1$ 作用于 C 点时 $F_{xA}=4/9$，于是可作出影响线的 EC 和 CG 段。然后，再过 H 点作 CG 段的平行线得到影响线的 GI 段。

在绘制 M_{DC} 的影响线时，先在 D 结点左侧插入一铰。不难看出在发生机构虚位移时 EC、CD、DG 和 GH 段分别为直线段，并且 DG 段应与 GI 段平行。与作 F_{xA} 的影响线时同样道理，M_{DC} 的影响线在 F 点、G 点左侧和 H 点的竖标值应为零。当 $F_P=1$ 分别作用于 C 点和 D 点时可以求得 M_{DC} 分别等于 $-\frac{2d}{3}$ 和 $\frac{2d}{3}$，由此可作出影响线的 EC、CD 和 DG 段。然后，再过 H 点作 DG 段的平行线即可得到影响线的 GI 段。F_{xA} 和 M_{DC} 的影响线分别如图 4－15b 和 c 所示。

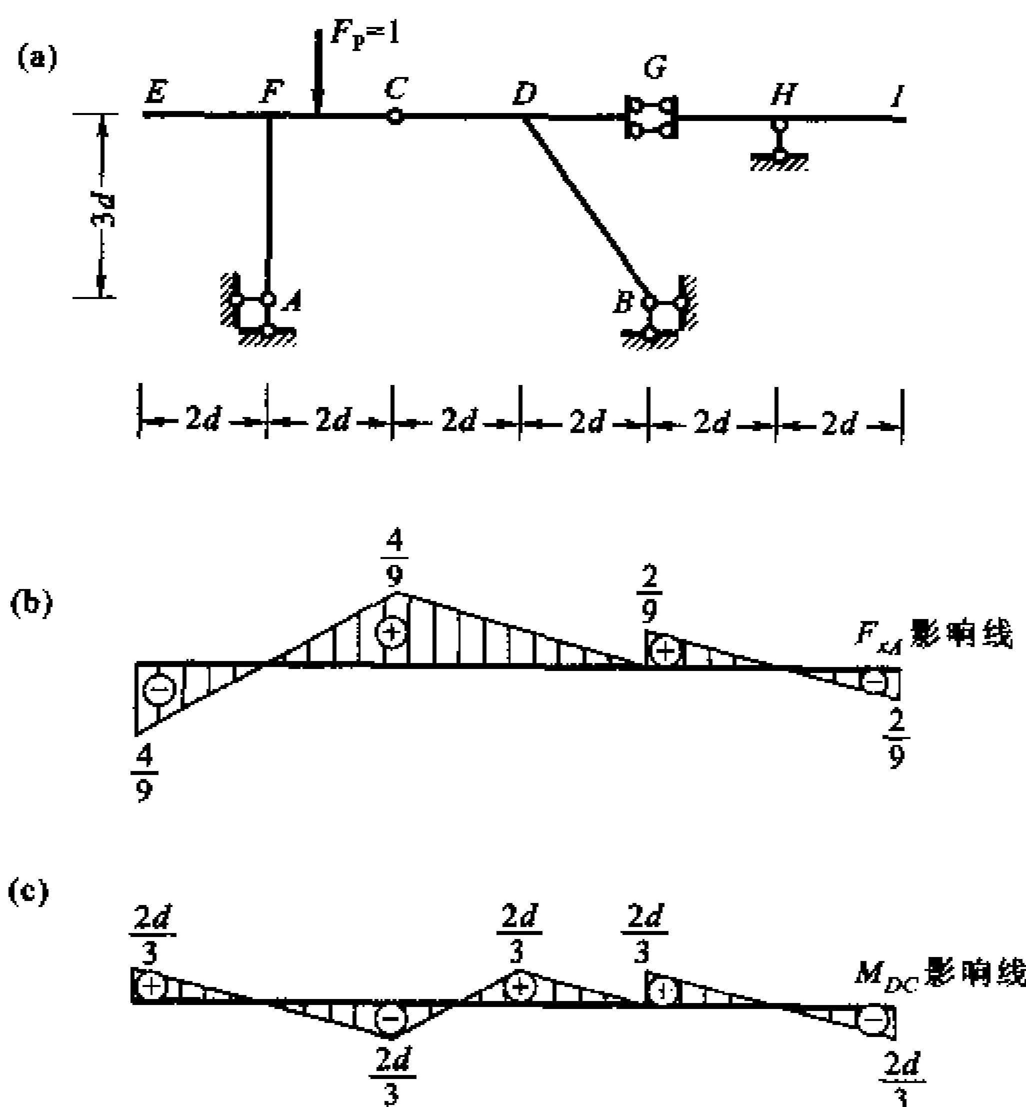


图　4－15

§ 4－5　影响线的应用

影响线是用于活荷载作用下结构分析的一项基本工具。应用影响线可以确定前面提出的某一量值随荷载作用位置移动时的变化规律，均布活载的最不利分布或移动荷载组的最不利位置以及结构各截面上内力变化的幅度范围。

4－5－1　应用影响线计算影响量

影响线描述了单位移动荷载作用下某一量值（影响量）的变化规律，当有移动荷载组或是可任意间断布置的分布荷载作用时，上述量值可以利用影响线根据叠加原理求得。

设结构上有一组集中荷载 $F_{P1}, F_{P2}, \cdots, F_{Pn}$ 作用，如图 4－16a 所示，量值 S 的影响线如图 4

-16b,其在荷载作用位置的竖标分别为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$。此时,集中荷载组所产生的影响量 S 应等于各荷载所产生影响量的代数和,即有

$$S = \sum_{i=1}^{n} F_{Pi} y_i \tag{4-1}$$

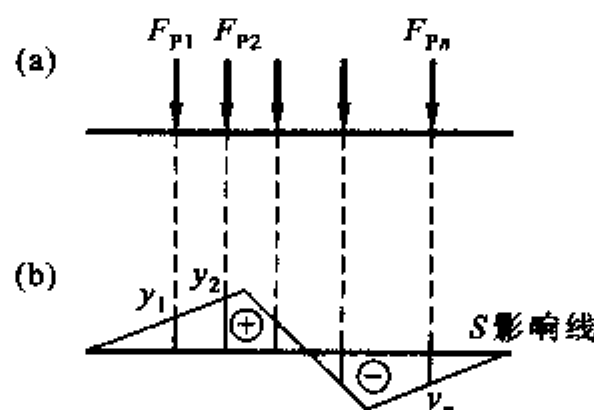


图 4-16

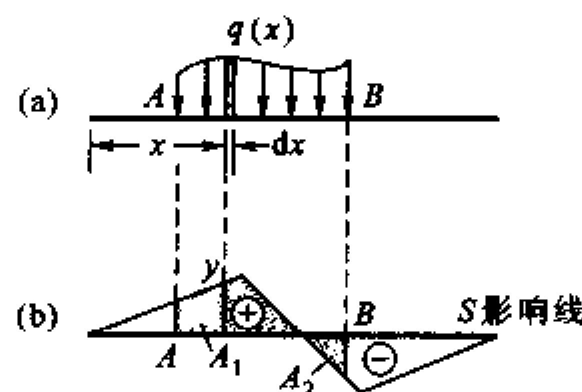


图 4-17

若是有如图4-17a所示的分布荷载作用,根据微积分原理,影响量 S 可以表达为

$$S = \int_A^B q(x) y \mathrm{d}x \tag{4-2}$$

当为均布荷载即 $q(x) = q$ 时,则上式成为

$$S = q\int_A^B y \mathrm{d}x = qA_0 \tag{4-3}$$

式中 A_0 表示 S 影响线在均布荷载范围内面积的代数和,即图4-17b中的阴影面积 $A_1 - A_2$。

例4-9　试利用影响线求图4-18a所示伸臂梁截面 C 的剪力。

解　先作出 F_{QC} 的影响线,并标出集中荷载作用处的竖标值如图4-18b所示。因截面 C 处有集中荷载作用,剪力将发生突变,所以需分 C 左和 C 右两个截面分别求出剪力 F_{QC}^{L} 和 F_{QC}^{R}。利用以上式(4-1)和(4-3)有

$$F_{QC}^{L} = \left(35\ \text{kN} \times \frac{3}{8} - 15\ \text{kN} \times \frac{1}{8} + 15\ \text{kN} \times \frac{2}{8}\right) + 8\ \text{kN/m} \times \left(\frac{2\ \text{m}}{2} \times \frac{2}{8} - \frac{5\ \text{m}}{2} \times \frac{5}{8} + \frac{3\ \text{m}}{2} \times \frac{3}{8}\right)$$

$$= 15\ \text{kN} - 6\ \text{kN} = 9\ \text{kN}$$

$$F_{QC}^{R} = \left(-35\ \text{kN} \times \frac{5}{8} - 15\ \text{kN} \times \frac{1}{8} + 15\ \text{kN} \times \frac{2}{8}\right) - 6\ \text{kN} = -26\ \text{kN}$$

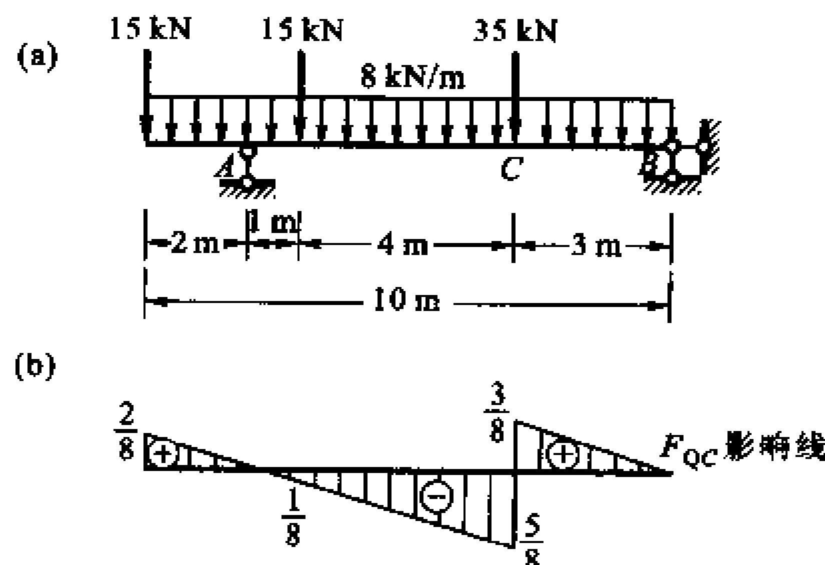


图 4-18

4－5－2　确定最不利荷载位置

1. 可以任意布置的均布荷载

在工程设计中，一般将楼面活载简化为可以任意间断布置的均布荷载来考虑。此时，使某一量值 S 达到最大值的最不利活载分布可利用相应的影响线来确定。由式(4－3)可知，当均布活载满布相应影响线的正号区时，S 即取得最大正值；反之，当均布活载满布相应影响线的负号区时，S 取得最大负值。例如，对于图 4－19a 所示的多跨静定梁，M_D 的影响线如图 4－19b 所示，欲求在均布活载作用下截面 D 的最大正弯矩和最大负弯矩，则最不利活载的布置应分别如图 4－19c、d 所示。确定了均布活载的最不利布置之后，便可应用静力学方法或是直接利用式(4－3)求得相应的最不利值。

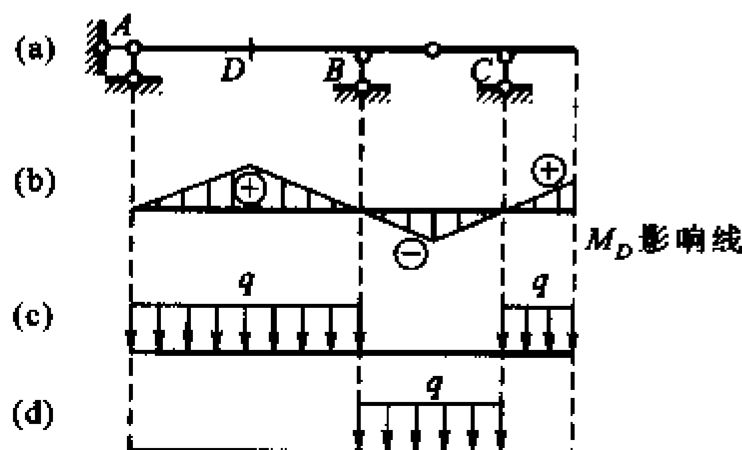


图　4－19

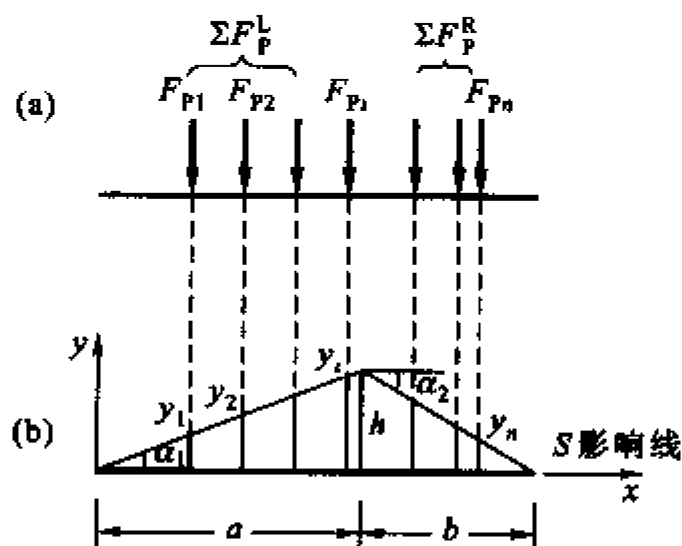


图　4－20

2. 移动荷载组

借助于某一量值 S 的影响线，可直接确定单个集中荷载使 S 达到最大正值或最大负值时的作用位置，只需将该集中荷载置于影响线正、负竖标值最大之处即可。对于移动荷载组作用的情况，则应先分析什么样的荷载作用位置可能使量值 S 取得极值，然后再从这些位置中确定最不利位置。在此，首先讨论影响线为一个三角形的情况。

图 4－20a、b 分别表示一组间距不变的移动集中荷载和某一量值 S 的影响线，影响线两直线段的倾角分别记为 α_1、α_2，均以逆时针方向为正。当荷载组移动一微小距离 Δx 时，S 的变化量为

$$\begin{aligned}\Delta S &= F_{P1}\Delta y_1 + F_{P2}\Delta y_2 + \cdots + F_{Pi}\Delta y_i + \cdots + F_{Pn}\Delta y_n \\ &= (F_{P1} + F_{P2} + \cdots + F_{Pi})\frac{h}{a}\Delta x - (F_{P,i+1} + \cdots + F_{Pn})\frac{h}{b}\Delta x \end{aligned} \tag{a}$$

式中 $\frac{h}{a} = \tan\alpha_1$ 和 $-\frac{h}{b} = \tan\alpha_2$ 均为常数，分别为影响线的左直线和右直线的斜率；而括号内分别代表作用于左直线和右直线部位的移动荷载。

量值 S 取得极值的条件是当荷载组作微小移动时 ΔS 发生变号。由式(a)可以看出，倘若在荷载移动过程中作用于左直线和右直线部位的荷载数量保持不变，则式(a)括号内将保持为常

数，这样就不可能发生 ΔS 变号的情况。或者说，要使 ΔS 变号就必须有一个集中荷载越过影响线的顶点。于是，便得到一条重要的结论：在荷载总数不变时，量值 S 取得极值的必要条件是有一个集中荷载恰好作用于影响线的顶点。

如果在荷载移动过程中 ΔS 由正值转为负值，则量值 S 取得一个极大值。假设 S 取得极大值发生在某集中荷载 F_{P_i} 作用于影响线顶点时，则该集中荷载便称为量值 S 的一个临界荷载，记为 F_{Pcr}；其对应的荷载位置就称为临界位置。若以 $\sum F_P^L$ 和 $\sum F_P^R$ 分别记 F_{Pcr} 以左和以右的荷载之和，则由式(a)可得三角形影响线时使量值 S 取得极大值的临界荷载判别式为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sum F_P^L + F_{Pcr}}{a} > \frac{\sum F_P^R}{b}\\ \frac{\sum F_P^L}{a} < \frac{\sum F_P^R + F_{Pcr}}{b}\end{aligned}\right\} \tag{4-4}$$

上式表明：临界位置的特点是有一集中荷载 F_{Pcr} 作用于影响线的顶点，将 F_{Pcr} 计入哪一侧（左侧或右侧），则哪一侧荷载的平均集度就大些。

利用式(4－4)虽可确定临界荷载，但有时临界荷载可能不止一个，此时可将相应的极值分别算出，其中最大的极值就是量值 S 的最不利值，而相应的荷载位置即为移动荷载组的最不利位置。一般地说，S 的最不利值是在数值较大而又比较密集的集中荷载作用于影响线的顶点时发生的。因此，在按式(4－4)试算之前可先通过直观判断排除部分荷载，从而减轻计算工作。

有关确定最不利荷载位置方面还需要明确以下基本概念：

(1) 无论移动荷载的移动方向如何，所得临界荷载的判别式是相同的，所求得的最不利荷载位置以及量值 S 的最不利值也是相同的。但在车辆调头行驶时，移动荷载的排列顺序将发生反向，此时对于同一量值 S 的最不利荷载位置以及 S 的最不利值均可能发生改变。

(2) 当某一集中荷载使得判别式(4－4)中的一式成立，另一式取等号时，该荷载依然属于临界荷载。

(3) 判别式(4－4)可以适用于图 4－21a 所示梁的影响线为单折点折线时的情况(图 4－21b)，但需注意式中 a、b 的取值应按图中所示；当影响线为直角三角形(图 4－21c)时，最不利荷载位置可由直观判定。

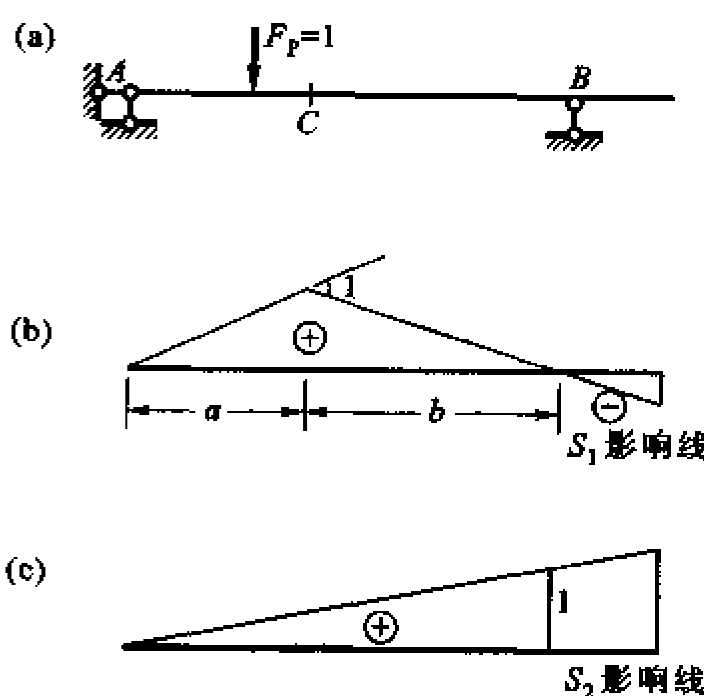


图　4－21

以下讨论影响线为多边形的情况。设有移动荷载组如图 4－22a 所示，某量值 S 的影响线如图 4－22b 所示为多边形。现用 $F_{R1}, F_{R2}, \cdots, F_{Rn}$ 分别表示作用在影响线各边区间内集中荷载的合力，其对应的影响线竖标记为 $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n$；用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 分别表示影响线各边的倾角，仍以逆时针方向为正。

当整个荷载组移动一微小距离 Δx 时，S 的变化量为

$$\begin{aligned}\Delta S &= F_{R1}\Delta\bar{y}_1 + F_{R2}\Delta\bar{y}_2 + \cdots + F_{Ri}\Delta\bar{y}_i + \cdots + F_{Rn}\Delta\bar{y}_n\\ &= F_{R1}\Delta x\tan\alpha_1 + F_{R2}\Delta x\tan\alpha_2 + \cdots + F_{Ri}\Delta x\tan\alpha_i + \cdots + F_{Rn}\Delta x\tan\alpha_n\end{aligned}$$

$$= \Delta x \sum_{i=1}^{n} F_{Ri} \tan \alpha_i \qquad \text{(b)}$$

式中各 $\tan \alpha_i$ 为 S 影响线各边的斜率，它们分别为常数。量值 S 取得极值的条件仍然是荷载组作微小移动时 ΔS 发生变号。按照与三角形影响线时同样的道理，ΔS 变号只可能发生在有一个集中荷载越过影响线的某一个顶点时。于是，便可以得到结论：量值 S 取得极值的必要条件是有一个集中荷载恰好作用于影响线的某一个顶点。根据这一道理，可得到多边形影响线时使 S 取得极大值的临界荷载判别式为

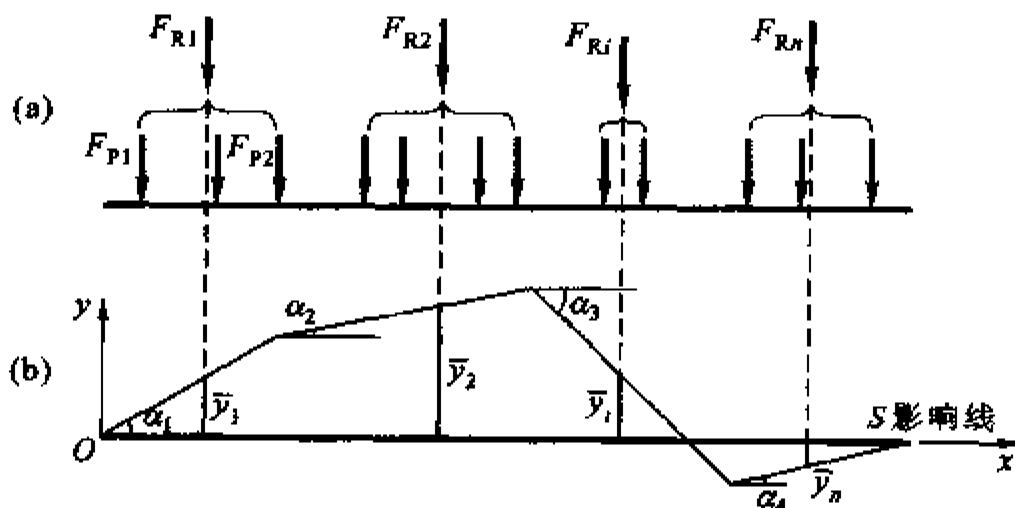


图 4-22

$$\left.\begin{array}{ll}\text{当 } F_{Pcr} \text{ 在影响线顶点左侧} & \sum F_{Ri} \tan \alpha_i > 0 \\ \text{当 } F_{Pcr} \text{ 在影响线顶点右侧} & \sum F_{Ri} \tan \alpha_i < 0\end{array}\right\} \qquad (4-5)$$

同理，使 S 取得极小值的临界荷载判别式为

$$\left.\begin{array}{ll}\text{当 } F_{Pcr} \text{ 在影响线顶点左侧} & \sum F_{Ri} \tan \alpha_i < 0 \\ \text{当 } F_{Pcr} \text{ 在影响线顶点右侧} & \sum F_{Ri} \tan \alpha_i > 0\end{array}\right\} \qquad (4-6)$$

通过直观判断和按以上判别式试算可以确定各临界荷载。然后，便可按式(4-1)求得 S 的各个极值，并进而求得 S 的最不利值和移动荷载组的最不利位置。

若是均布移动荷载作用的情况，则量值 S 是荷载作用位置参数 x 的二次函数，其最不利荷载位置可按一般求极值的方法，由 $\frac{dS}{dx}=0$ 的条件确定。若移动荷载组中同时包含有集中荷载和均布荷载，则对于集中荷载通过影响线的顶点位置时，临界荷载应按 $\sum F_{Ri} \tan \alpha_i$ 是否变号来判断；而对于均布荷载通过影响线顶点时的不利位置，则需按 $\frac{dS}{dx}=0$ 的条件来确定。

实际的移动荷载是千变万化的。例如，在桥梁上行驶的火车或汽车种类繁多，载运情况也十分复杂。在结构设计时不可能也没有必要对每种情况都进行计算，而是采用某种标准移动荷载来进行设计。这些标准荷载是按照不同类别的桥梁经过统计分析制定出来的，它含盖了正常使用条件下可能发生的情况。有关铁路和公路的标准荷载可见附录 A。

例 4-10 试求图 4-23a 所示吊车梁在图示吊车竖向荷载作用下 B 支座的最大反力。设其中一台吊车轮压为 $F_{P1}=F_{P2}=426.6$ kN，另一台轮压为 $F_{P3}=F_{P4}=289.3$ kN，轮距及车挡限位的最小车距如图所示。

解 先作出 B 支座反力 F_{yB} 影响线。由直观判断只有当 F_{P2} 或 F_{P3} 作用在影响线顶点时 F_{yB} 可能达到最大值。

先考虑 F_{P2} 作用于 B 点的情况(图 4-23b)，此时 F_{P4} 已越出梁右端，有

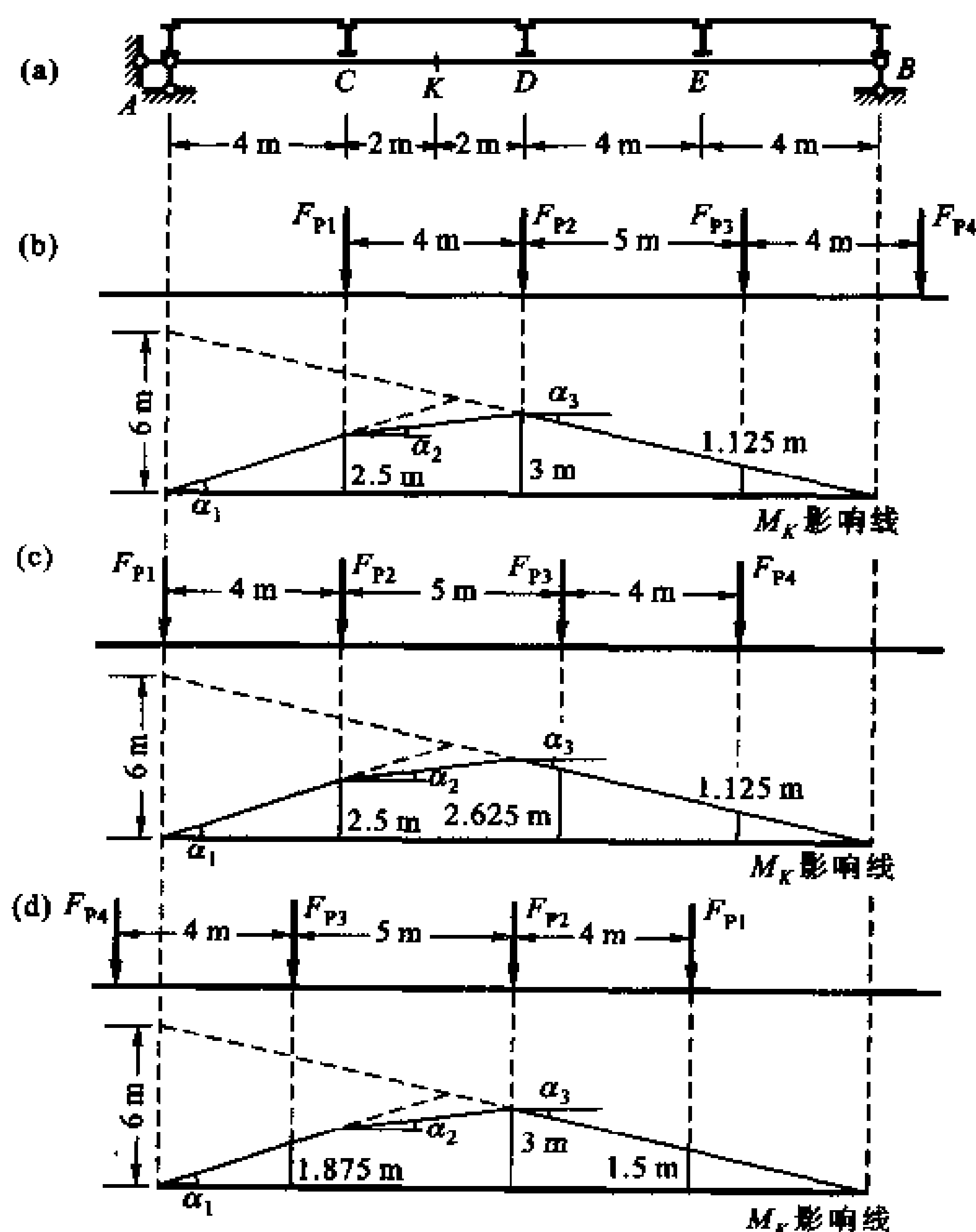


图　4－24

$$= 70\ \text{kN}\times 0.625 + 130\ \text{kN}\times 0.125 - 50\ \text{kN}\times 0.375 = 41.25\ \text{kN} > 0$$

F_{P2}在 D 点右侧：$\sum F_{Pi}\tan\alpha_i = F_{P1}\tan\alpha_2 + F_{P2}\tan\alpha_3 + F_{P3}\tan\alpha_3$

$$= 70\ \text{kN}\times 0.125 - 130\ \text{kN}\times 0.375 - 50\ \text{kN}\times 0.375 = -58.75\ \text{kN} < 0$$

可见$\sum F_{Pi}\tan\alpha_i$变号，故此为一临界位置。其相应的影响量极值为

$$M_K = \sum F_{Pi}y_i = 70\ \text{kN}\times 2.5\ \text{m} + 130\ \text{kN}\times 3\ \text{m} + 50\ \text{kN}\times 1.125\ \text{m} = 621.25\ \text{kN·m}$$

若将重车后轴置于 C 点，则有图 4－24c 所示四个轴压布置在影响线范围内，得

F_{P2}在 C 点左侧：$\sum F_{Pi}\tan\alpha_i = F_{P2}\tan\alpha_1 + F_{P3}\tan\alpha_3 + F_{P4}\tan\alpha_3$

$$= 130\ \text{kN}\times 0.625 - 50\ \text{kN}\times 0.375 - 100\ \text{kN}\times 0.375 = 25\ \text{kN} > 0$$

F_{P2}在 C 点右侧：$\sum F_{Pi}\tan\alpha_i = F_{P1}\tan\alpha_1 + F_{P2}\tan\alpha_3 + F_{P3}\tan\alpha_3 + F_{P4}\tan\alpha_3$

$$= 70\ \text{kN}\times 0.625 + 130\ \text{kN}\times 0.125 - 50\ \text{kN}\times 0.375 - 100\ \text{kN}\times 0.375 = 3.75\ \text{kN} > 0$$

因$\sum F_{Pi}\tan\alpha_i$未变号，所以此非临界位置。经判定车队左行时不再有临界位置。

（2）再考虑车队右行的情况

将重车后轴置于 D 点，此时仅有三个荷载在影响线范围内（图 4－24d），得

F_{P2}在 D 点左侧：$\sum F_{Pi}\tan\alpha_i = F_{P3}\tan\alpha_1 + F_{P2}\tan\alpha_2 + F_{P1}\tan\alpha_3$

$$= 50\ \text{kN}\times 0.625 + 130\ \text{kN}\times 0.125 - 70\ \text{kN}\times 0.375 = 21.25\ \text{kN} > 0$$

F_{P2}在 D 点右侧：$\sum F_{Pi}\tan\alpha_i = F_{P3}\tan\alpha_1 + F_{P2}\tan\alpha_3 + F_{P1}\tan\alpha_3$

$= 50\ \text{kN} \times 0.625 - 130\ \text{kN} \times 0.375 - 70\ \text{kN} \times 0.375 = -43.75\ \text{kN} < 0$

可见，$\sum F_{Pi} \tan \alpha_i$ 变号，故此也是临界位置，其对应的影响量极值为

$$M_K = \sum F_{Pi} y_i = 50\ \text{kN} \times 1.875\ \text{m} + 130\ \text{kN} \times 3\ \text{m} + 70\ \text{kN} \times 1.5\ \text{m} = 588.75\ \text{kN·m}$$

继续试算未发现其他临界位置。

(3) 比较车队左行和右行两种情况可知，荷载最不利位置应如图4－23b所示，此时梁 K 截面的最大弯矩为 $M_{K(\max)} = 621.25\ \text{kN·m}$。

§4－6 简支梁的内力包络图和绝对最大弯矩

4－6－1 内力包络图

结构分析时常需要求出在恒载和活载共同作用下各截面上的最大和最小(或最大负值)内力，从而为设计提供依据。例如，在混凝土结构构件设计中，常需按照上述情况来确定钢筋的配置以及构造。如果将结构杆件各截面的最大和最小(或最大负值)内力值按同一比例标在图上，连成曲线，则这种曲线图形就称为内力包络图。因此，内力包络图实际上表达了各截面上内力变化的上、下限。

在实际工程设计时，对于动荷载通常需乘上规定的动力系数以反映荷载的动力影响。在绘制内力包络图时，一般是将杆件分成若干等分，对每一分点所在的截面均按§4－5所述方法利用影响线求出其内力的上、下限值，最后再连成曲线。现以简支吊车梁为例介绍内力包络图的绘制方法。

图4－25a所示为一跨度为12 m的简支吊车梁，承受图示两台同吨位的吊车荷载，吊车轮压为 $F_{P1} = F_{P2} = F_{P3} = F_{P4} = 285\ \text{kN}$，取动力系数 $\mu = 1.1$。吊车梁自重 $q = 12\ \text{kN/m}$。为求作内力包络图，可取梁的8等分点进行计算。利用对称性，只需计算梁左半部分即可。图4－25c～f所示分别为1至4截面上弯矩的最不利状态，其对应的最不利值与相应的恒载弯矩值之和即为截面的最大弯矩。截面弯矩的最小值仅是由恒载引起的。将以上求得的各截面最大和最小弯矩标于图4－25g，作出连线即为该简支梁的弯矩包络图。同理，由图4－26b～f的截面剪力最不利状态可作出该梁的剪力包络图如图4－26g所示。

4－6－2 简支梁的绝对最大弯矩

所谓简支梁的绝对最大弯矩，是指简支梁的任意截面上可能出现的最大弯矩。实际上，它应当就是简支梁弯矩包络图中的最大竖标值。由图4－25g中可见，简直梁在吊车移动荷载作用下的绝对最大弯矩并不发生在梁的跨中，而通常是发生在跨中附近。寻找并确定绝对最大弯矩这一问题的基本特点是：截面的位置和荷载位置都是未知的，即这两者都是变化的。

由§4－5中的分析已知，当内力影响线为三角形时，其最不利荷载位置必定发生在移动荷载组中的一个临界荷载 F_{Pcr} 恰好位于影响线的顶点(即截面所在点)时。由此便可推理：绝对最大弯矩必定发生在某一临界荷载之下。根据这一推理，就可以通过试算结合解析的方法确定简支梁的绝对最大弯矩。即先可通过判断确定哪几个荷载之下可能产生绝对最大弯矩；再根据任一荷载 F_{Pi} 下截面弯矩随荷载移动而变化的规律，分别求出上述临界荷载之下的截面最大弯矩；

然后通过比较求得绝对最大弯矩。

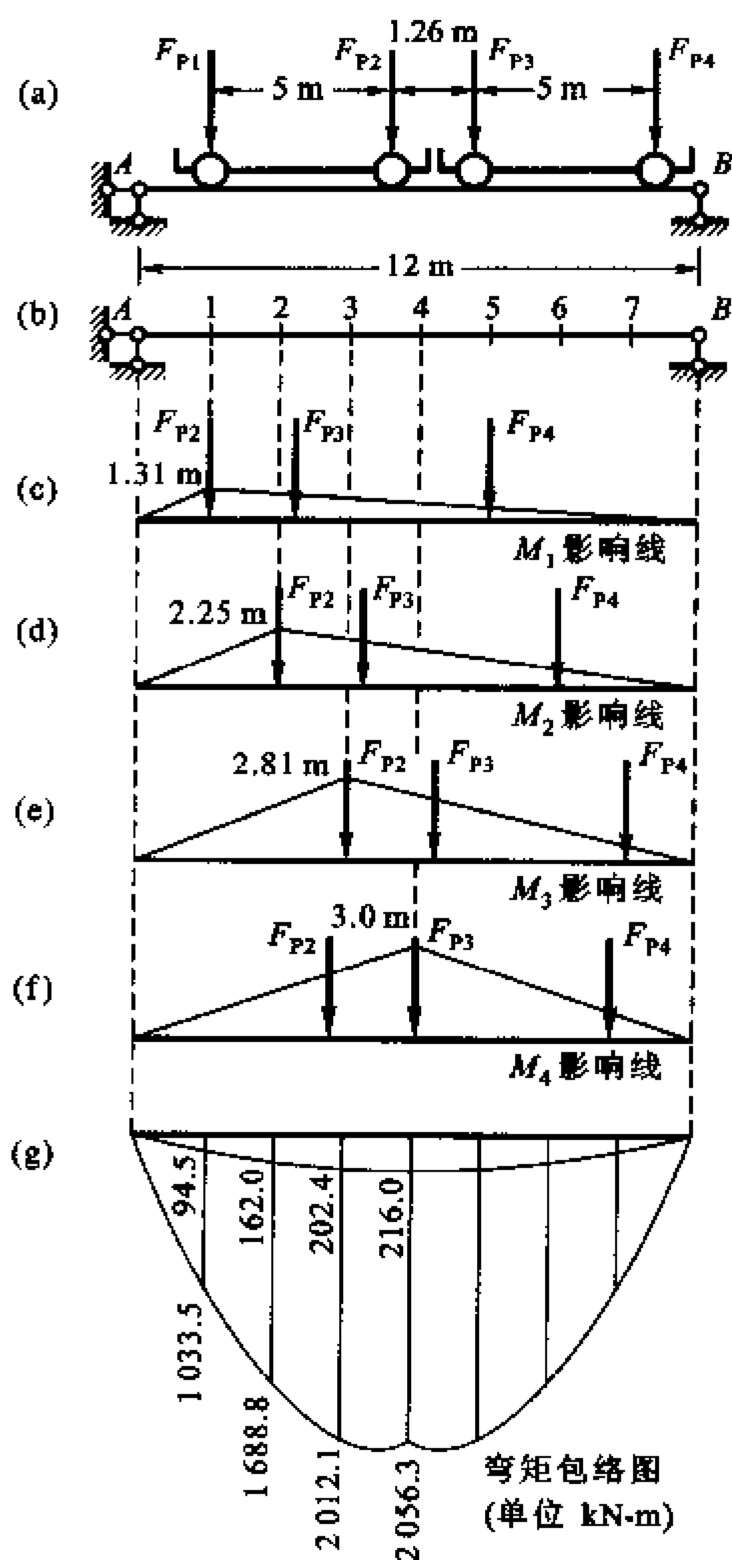


图 4-25

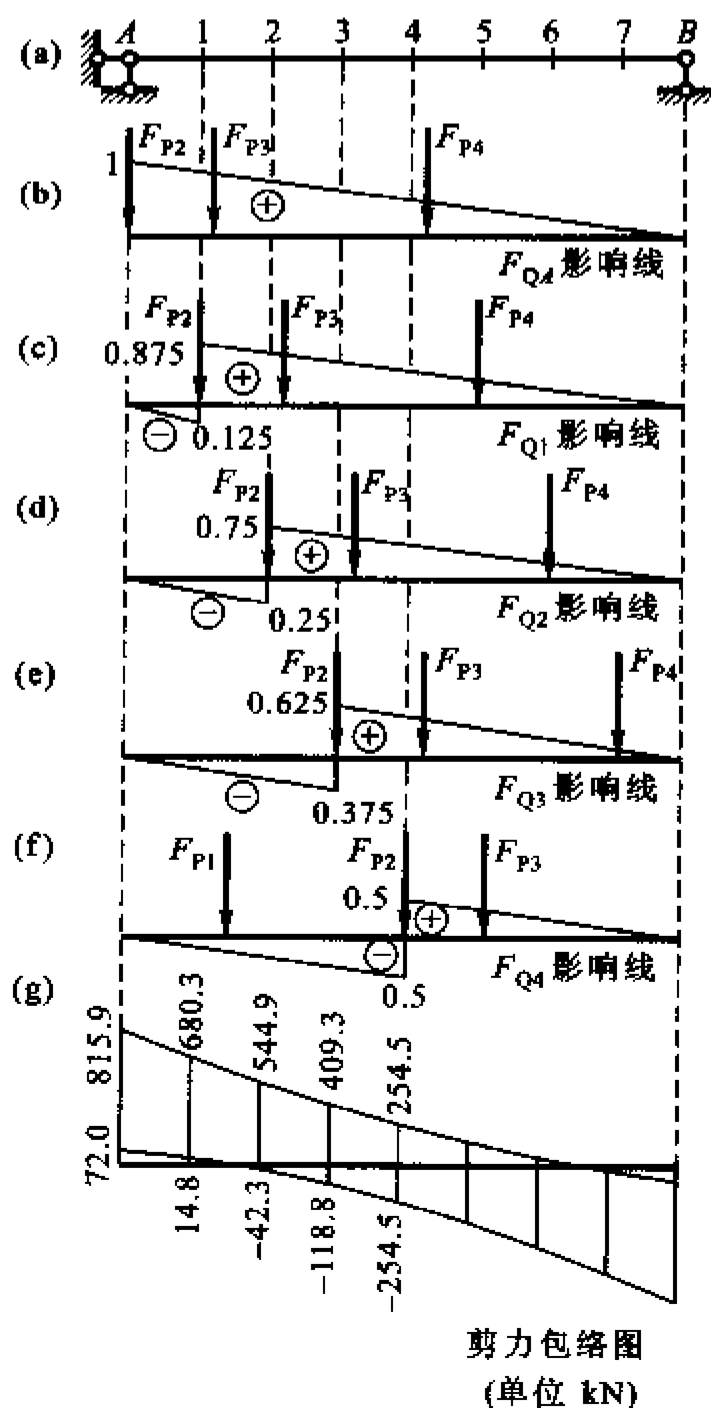


图 4-26

设简支梁上作用有移动荷载如图 4-27 所示。用 x 表示某一指定荷载 F_{P_i} 至 A 支座的距离；a 表示该指定荷载 F_{P_i} 至梁上荷载合力 F_R 的距离；M_i 表示 F_{P_i} 左边的荷载对 F_{P_i} 作用点的力矩，它是一个与 x 无关的常数。此时，F_{P_i} 所在截面的弯矩 M_x 可以表示为

$$M_x = F_{yA}x - M_i = \frac{F_R}{l}(l - x - a)x - M_i$$

M_x 取得极值的条件为

$$\frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x} = \frac{F_R}{l}(l - 2x - a) = 0$$

得

$$x=\frac{l-a}{2} \qquad (4-7a)$$

或

$$x=l-x-a \qquad (4-7b)$$

式(4-7)表明：当 F_{P_i} 与合力 F_R 恰好位于梁的中点两侧的对称位置时，F_{P_i} 所在截面的弯矩达到最大值为

$$M_{max}=\frac{F_R}{l}\left(\frac{l}{2}-\frac{a}{2}\right)^2-M_i \qquad (4-8)$$

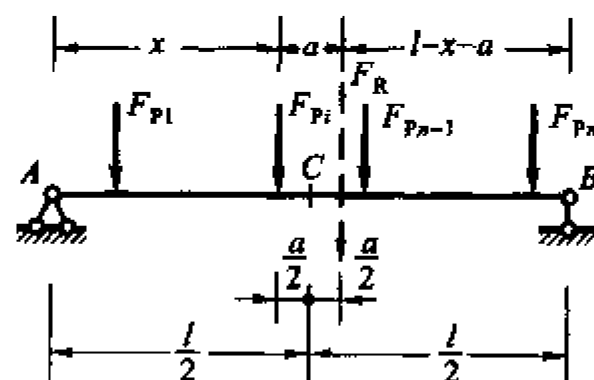


图 4-27

根据上述结论，就可以将需作试算的各个荷载之下的最大弯矩分别求出。将它们加以比较，便求得绝对最大弯矩。因为简支梁在吊车移动荷载作用下的绝对最大弯矩通常发生在梁的跨中附近，所以一般情况下使梁跨中发生最大弯矩的临界荷载，也就是发生绝对最大弯矩的临界荷载。

应当注意的是：F_R是梁上实有荷载的合力。在移动 F_{P_i} 时梁上实有荷载的个数可能有增减，这时就需要重新计算合力 F_R 的数值和位置。

例 4-12　试求图 4-25a 所示梁在吊车移动荷载作用下的绝对最大弯矩。已知 $F_{P1}=F_{P2}=F_{P3}=F_{P4}=285$ kN。

解　根据已知条件，显然只有 F_{P2} 和 F_{P3} 可能是产生绝对最大弯矩的临界荷载。本例中两台吊车的轮距和轮压均相同，所以只需选择其中一个集中荷载，如 F_{P2} 进行分析计算。

(1) 梁上有四个荷载的情况(图 4-28a)。此时，F_R 位于 F_{P2} 的右侧，将 F_{P2} 和 F_R 对于梁中点 C 对称布置，则有

$$F_R=4\times285\ \text{kN}=1\ 140\ \text{kN}$$

$$a=\frac{1.26\ \text{m}}{2}=0.63\ \text{m},\quad x=\frac{12\ \text{m}-0.63\ \text{m}}{2}=5.685\ \text{m}$$

由此可求得 F_{P2} 作用处截面的弯矩为

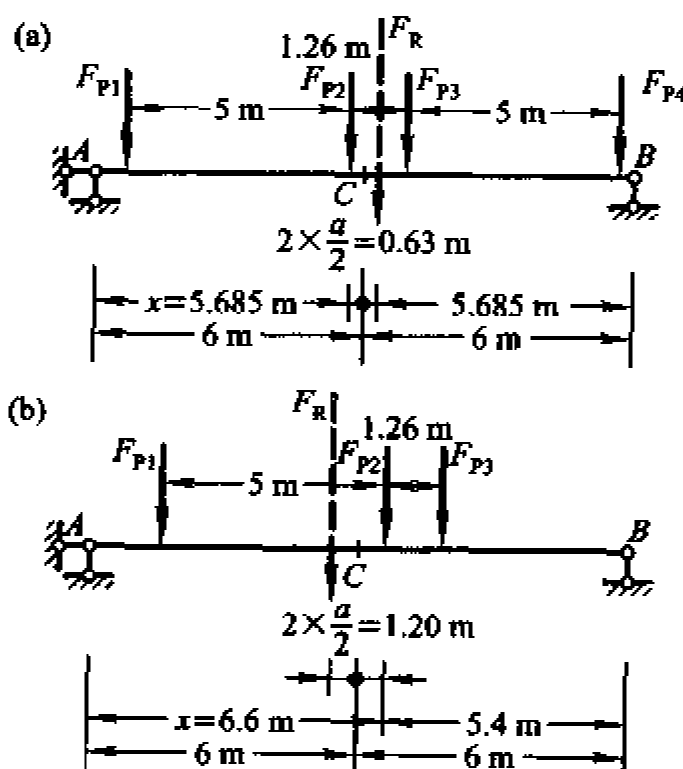
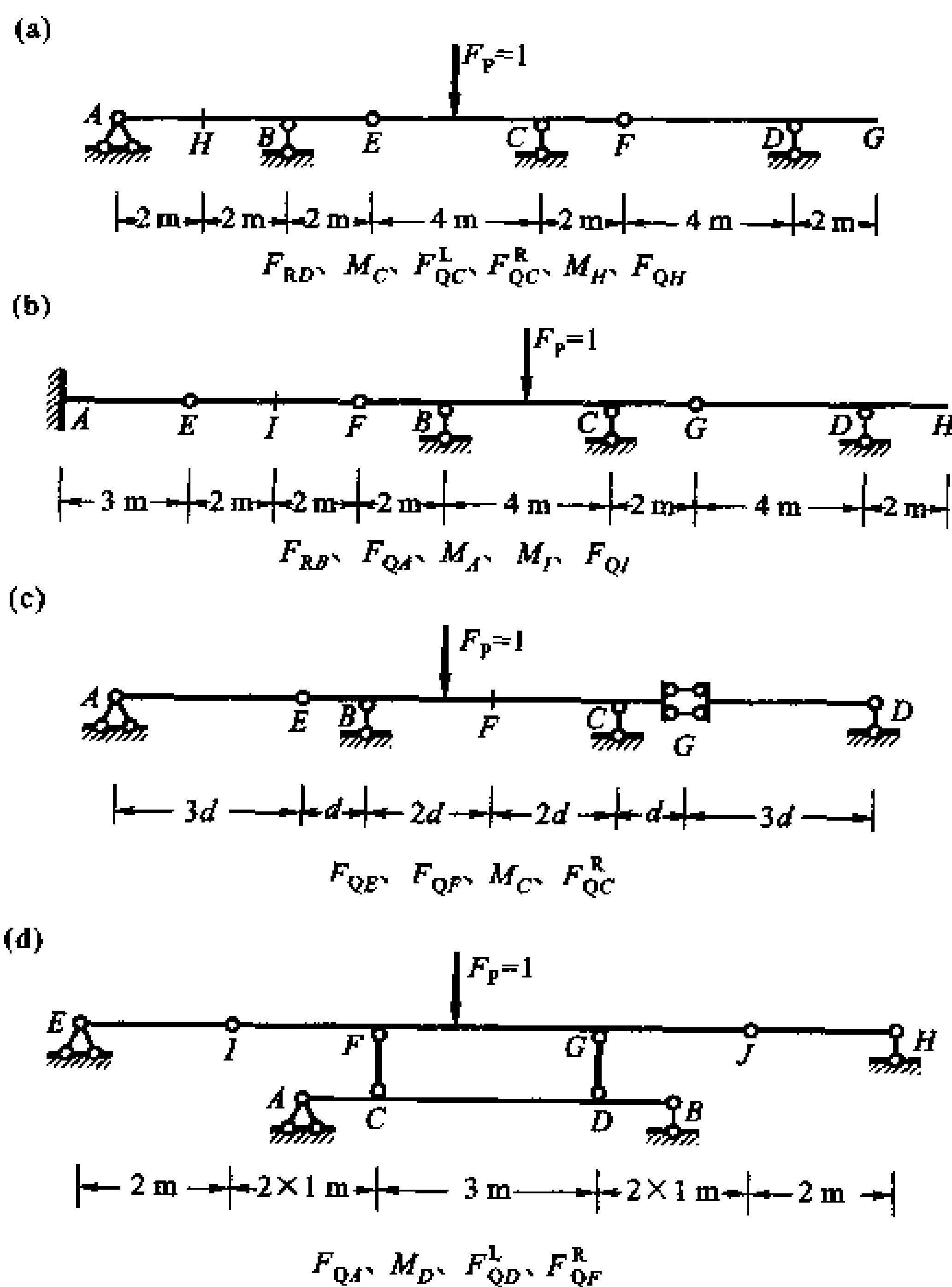


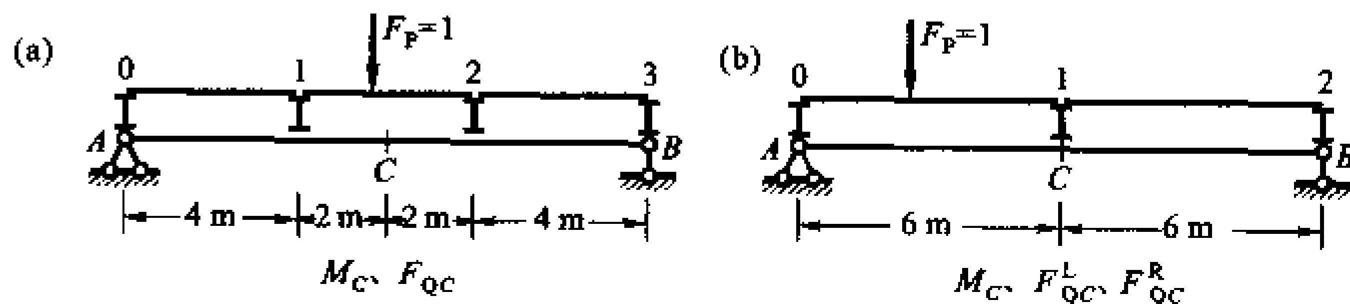
图 4-28

4-6 试用机动法绘制图示结构中指定量值的影响线。



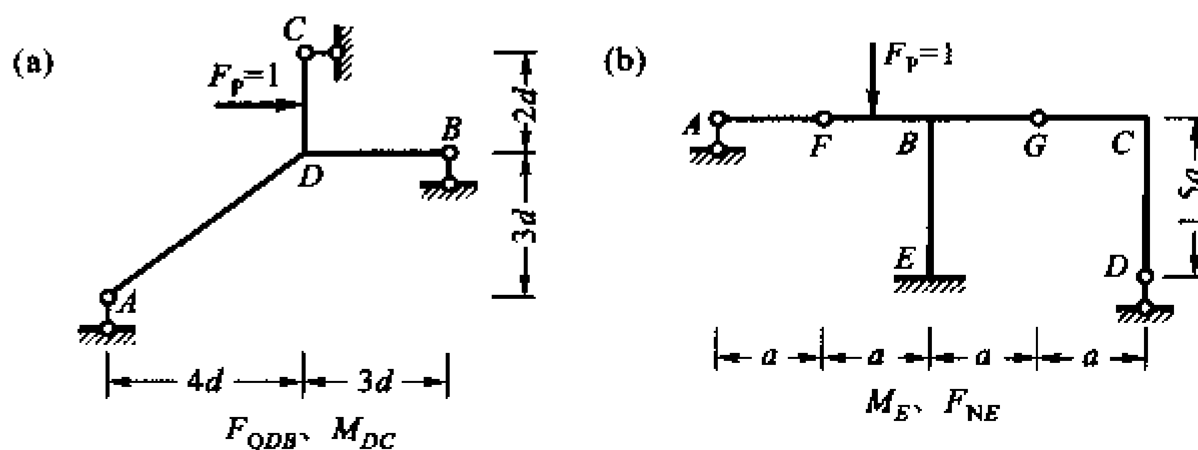
题4-6图

4-7 试绘制图示结构主梁指定量值的影响线，并加以比较。



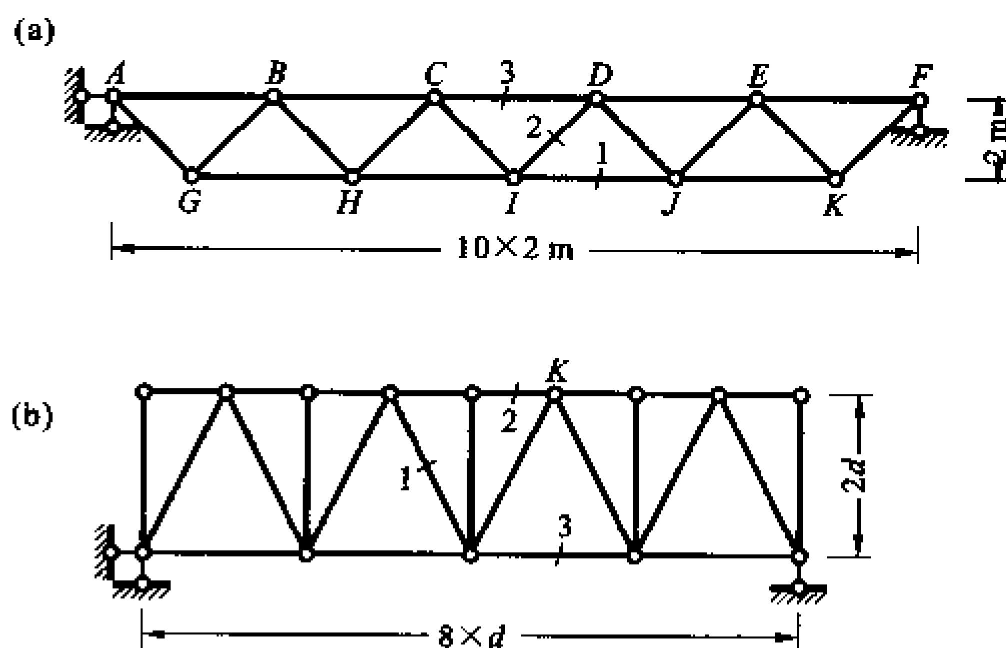
题4-7图

4－8 试绘制图示刚架指定量值的影响线。



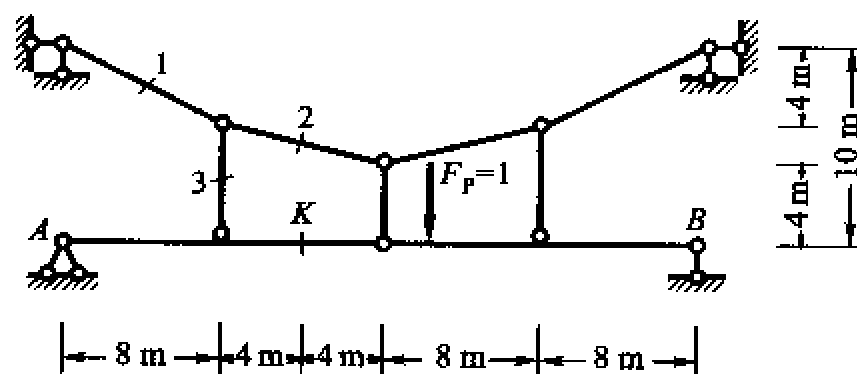
题 4－8 图

4－9 试绘制图示桁架指定杆的内力影响线，分别考虑荷载为上承和下承两种情况。



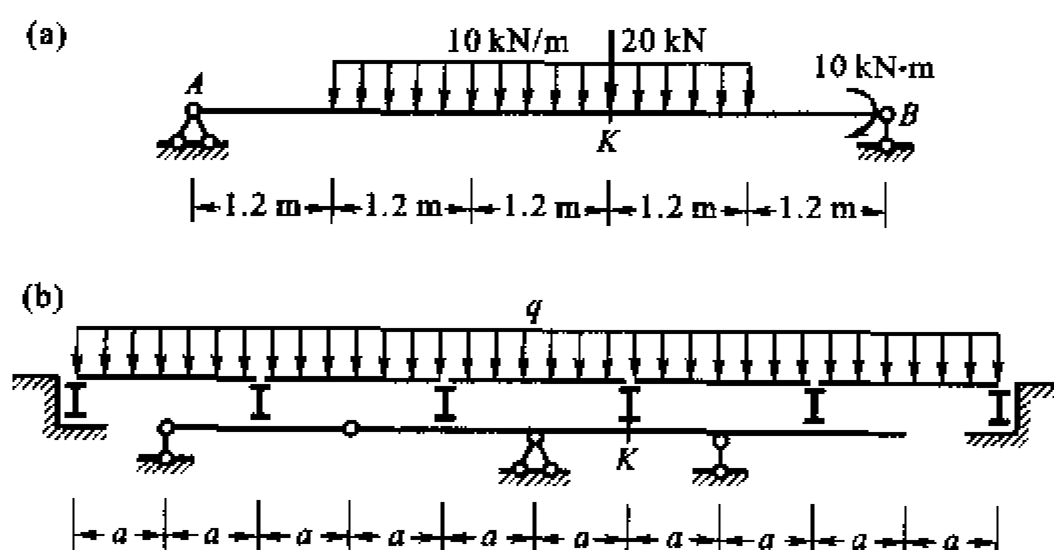
题 4－9 图

4－10 试绘制图示组合结构 F_{N1}、F_{N2}、F_{N3}、M_K 和 F_{QK} 的影响线。



题 4－10 图

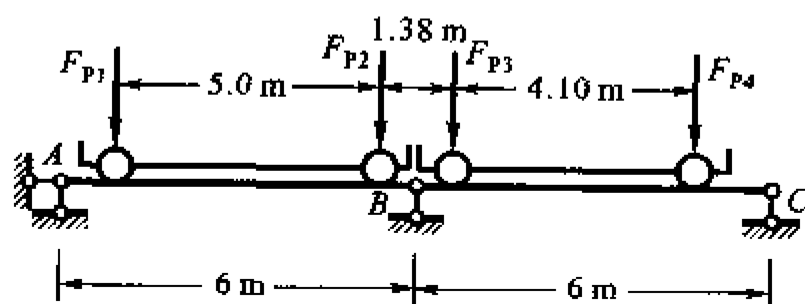
4－11　试利用影响线计算图示荷载作用下 M_K 和 F_{QK}^{R} 的值。



题 4－11 图

4－12　试说明对于三角形或多边形影响线，为什么移动集中荷载组的最不利位置必定发生在有集中荷载位于影响线的某一顶点时？上述情况下临界荷载应如何判定？

4－13　试求图示吊车梁在吊车竖向荷载作用下 B 支座的最大反力。设一台吊车轮压为 $F_{P1}=F_{P2}=285$ kN，另一台轮压为 $F_{P3}=F_{P4}=250$ kN，轮距及车挡限位的最小车距如图所示。

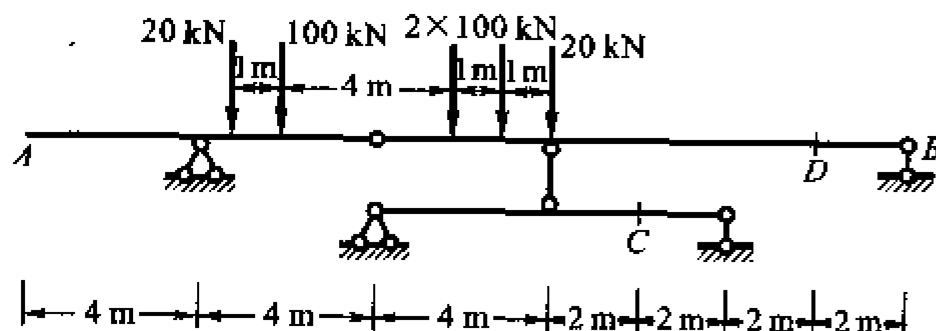


题 4－13 图

4－14　图示结构活荷载作用于 AB 之上，试求：

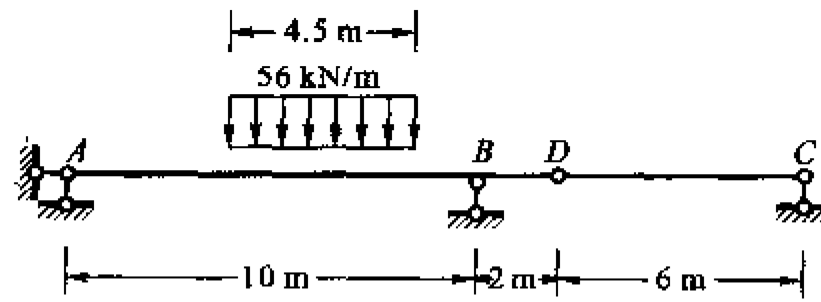
(1) 图示移动荷载组作用时 C 截面上的最大弯矩 $M_{C(\max)}$；

(2) 可任意间断布置的均布活荷载 $q=20$ kN/m 作用时，D 截面上的最大剪力 $F_{QD(\max)}$（包括正、负两个方向）。



题 4－14 图

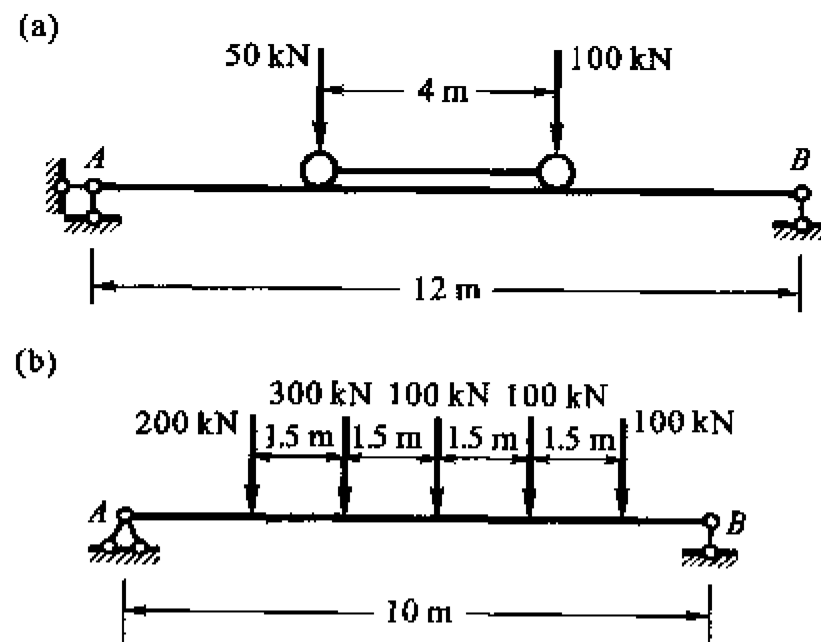
4－15　试求在图示分布移动荷载作用下 B 支座反力 F_{yB} 的最大值。



题 4－15 图

4－16　什么是绝对最大弯矩？如何确定简支梁发生绝对最大弯矩时移动集中荷载组的位置？

4－17　试求图示简支梁在移动荷载组作用下的绝对最大弯矩，并与跨中截面的最大弯矩相比较。



题 4－17 图

第5章 结构位移计算

§5-1 概　　述

工程结构所用的材料是可变形的。因此,结构在荷载作用下会发生变形,而这种变形会引起结构各处位置的变化,即结构的位移。例如,图5-1所示静定结构,在图示荷载作用下会发生如虚线所示的变形和位移。结构的位移可以分为线位移和角位移。图5-1中BB'和CC'分别表示B点和C点的线位移;θ_B表示刚结点B的角位移;而$\Delta_{\theta C}$则表示铰C左、右两侧杆件截面之间的相对角位移。因铰C以右为附属部分,当荷载作用于基本部分时,附属部分无内力,所以仅发生刚体位移。所有以上这些位移可以统称为广义位移。

除荷载之外,温度变化、支座移动、材料收缩和制造误差等非荷载因素,也会使结构产生位移。例如,图3-66a、b中虚线所示位移分别是由支座移动和温度变化引起的。

结构位移计算的一项重要目的是为了校核结构的刚度。工程结构除了应满足设计规范所规定的承载力条件方面的要求以外,还应满足正常使用条件方面的有关规定,其中最主要的就是满足对结构刚度方面的要求。例如,对于受弯杆件和梁式结构(如梁式桁架),最大挠度与其跨度之比应小于规定的限值。相应于不同的情况,这一限值也是不同的。又如,对于各类高层建筑结构,在风荷载或地震作用下,层间位移与层高之比以及结构顶部位移与总高度之比均应小于规定的限值。这种规定保证了高层建筑居住的舒适感,门、窗能正常开启,装饰不出现裂缝和破坏,管线的安全性以及电梯的正常运行等使用条件。

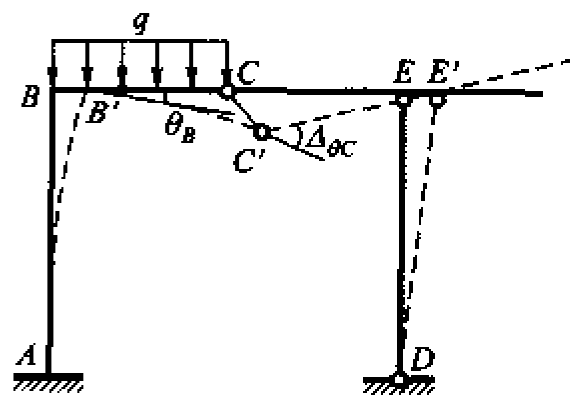


图 5-1

结构刚度的大小还常会影响其所受到的动力作用。例如,列车通过桥梁时,若桥梁的挠度过大,线路就有较大的起伏,这就加大了快速移动的列车对桥梁的动力作用。又如,房屋建筑地震响应的大小也直接与建筑物的刚度有关,刚度过大对建筑物的抗震常常是不利。高耸结构和高层建筑所受风荷载的动力作用,也与其刚度有关系。

有时,为了满足设计对结构外形的要求,需要预先计算并考虑结构的位移。例如,对于大跨度的梁和屋架,在制作时常需预先起拱,这样就可以避免在使用状态下产生明显的下挠。图5-2所示即为屋架在制作时,预先留有起拱量s的情况。又如,多跨钢桁桥常采用悬臂拼装的方式施工,为确保桥段的顺利合拢就位和桥面的顺直,也需要对结构在施工过程中的位移进行计算,以便在施工中采取相应的措施。

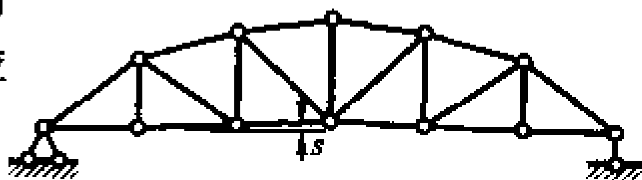


图 5-2

结构位移计算的另一项重要目的是为分析超静定结构,

并且为结构的动力和稳定性计算打下基础。超静定结构的内力不能由静力平衡条件惟一确定，其求解还必须同时考虑变形条件，这就需要计算结构的位移。例如，图5-3a所示的梁因有一个多余约束，所以是超静定的。仅用$\sum F_x=0$、$\sum F_y=0$和$\sum M=0$三个平衡方程，无法全部确定图示的四个支座反力。掌握了结构的位移计算，就可以采用图5-3b的静定梁为计算模型，根据梁在外荷载q和B支座反力F_{yB}共同作用下，B端竖向位移应等于零的变形协调条件，可确定F_{yB}的数值，并进而求得梁的内力。

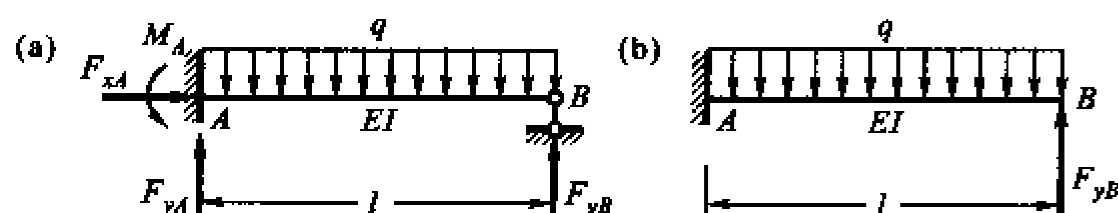


图 5-3

按照材料力学的原理，受弯杆件的变形曲线可以根据挠曲微分方程和边界条件来确定。但结构分析中往往只需计算结构上个别点在指定方向上的位移，这样就可以采用更为简捷的计算方法。结构力学中计算位移的一般方法是以虚功原理为基础的，本章限于介绍静定结构的位移计算。

§5-2 变形体的虚功原理

虚功原理是力学的普遍原理，在结构分析中有多方面的应用。在理论力学中已介绍了刚体系的虚功原理。其表述可见于§4-3。

对于变形体来说，在平衡位置附近发生虚位移时，外力所作的虚功之和一般不等于零。例如，图5-4a所示的梁在荷载作用下处于平衡状态。当梁因某种原因发生如图5-4b所示的虚位移时，作用于梁上的荷载将作虚功。因为虚位移的方向与相应的荷载作用方向相同，所以外力虚功之和明显不等于零。

从图5-4a的梁上截取一微段(图5-4c)，作用在微段上的力除荷载q之外，还有两侧截面上的内力。这些内力对于微段而言应视作外力。当发生图5-4b所示的虚位移时，该微段的位移可以分解为刚体虚位移和变形虚位移两部分(图5-4d中实线和虚线)，若将微段两侧截面上

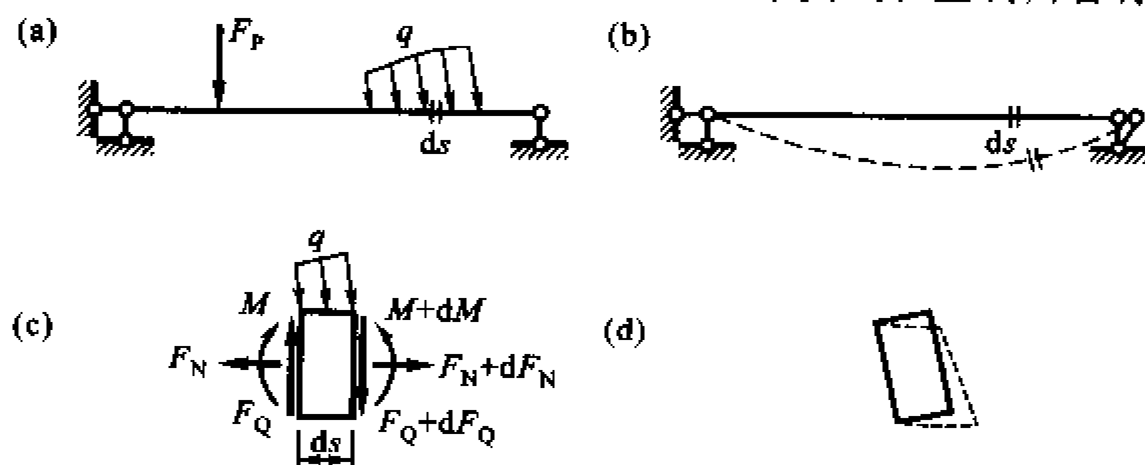


图 5-4

$\delta W_{刚}$与在变形虚位移上所作虚功δW_{i}之和，即

$$\delta W=\delta W_{刚}+\delta W_{i}$$

由于上述各微段均处于平衡状态，故由刚体系的虚功原理可知，所有力在刚体虚位移上所作虚功之和等于零，即

$$\delta W_{刚}=0$$

于是，有

$$\delta W=\delta W_{i} \tag{b}$$

比较(a)、(b)两式就可以得到式(5-1)的虚功方程。

对于刚体系来说，由于不存在变形虚位移，因而$\delta W_{i}=0$。这样，由式(5-1)可得$\delta W_{e}=0$，即外力在虚位移中所作的虚功之和等于零。由此可见，刚体系的虚功原理只是变形体虚功原理的一种特例。

以下讨论在发生虚位移的过程中，结构所接受的虚变形功δW_{i}的计算。对于平面杆系结构来说，杆件上任一微段的变形虚位移均可以如图5-6所示，分解为轴向虚变形$\delta\varepsilon ds$、平均剪切虚变形$\delta\gamma_0 ds$和弯曲虚变形$\delta\kappa ds$。于是，在略去高阶微量之后，作用于微段两侧截面上的应力合力(图5-4c)在微段变形虚位移上所作的虚功可表示为

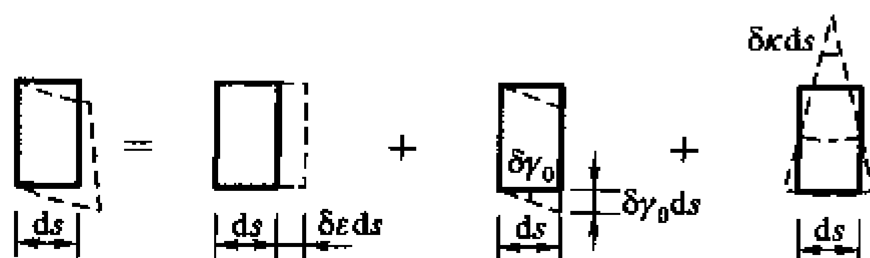


图　5-6

$$d\delta W_{i}=F_{N}\delta\varepsilon ds+F_{Q}\delta\gamma_0 ds+M\delta\kappa ds$$

式中$\delta\varepsilon$、$\delta\gamma_0$和$\delta\kappa$分别表示微段因虚变形引起的轴向虚应变，平均虚剪切角和虚曲率。

杆件的虚变形功可以通过沿杆长的积分求得，整个结构所接受的总虚变形功应为各杆虚变形功之和，即

$$\delta W_{i}=\sum\int(F_{N}\delta\varepsilon+F_{Q}\delta\gamma_0+M\delta\kappa)ds \tag{5-2}$$

将上述结果代入虚功方程式(5-1)，可得

$$\delta W_{e}=\sum\int(F_{N}\delta\varepsilon+F_{Q}\delta\gamma_0+M\delta\kappa)ds \tag{5-3}$$

这就是平面杆系结构的虚功方程。

§5-3　结构位移计算的一般公式　单位荷载法

利用平面杆系结构的虚功方程，可以推导出结构位移计算的一般公式。

图5-7a所示为一结构在荷载、支座位移和温度变化等作用下发生实际变形的情况。结构上某一点K在变形后移至未知位置K'。若需求得实际状态中K点沿任一指定方向kk上的位

移Δ_K,可以虚拟图5-6b所示的平衡受力状态。虚拟状态是在K点沿kk方向作用一单位荷载$F_{PK}=1$,记此时结构的内力为$\bar{F}_N$、$\bar{F}_Q$和$\bar{M}$,反力为$\bar{F}_R$。

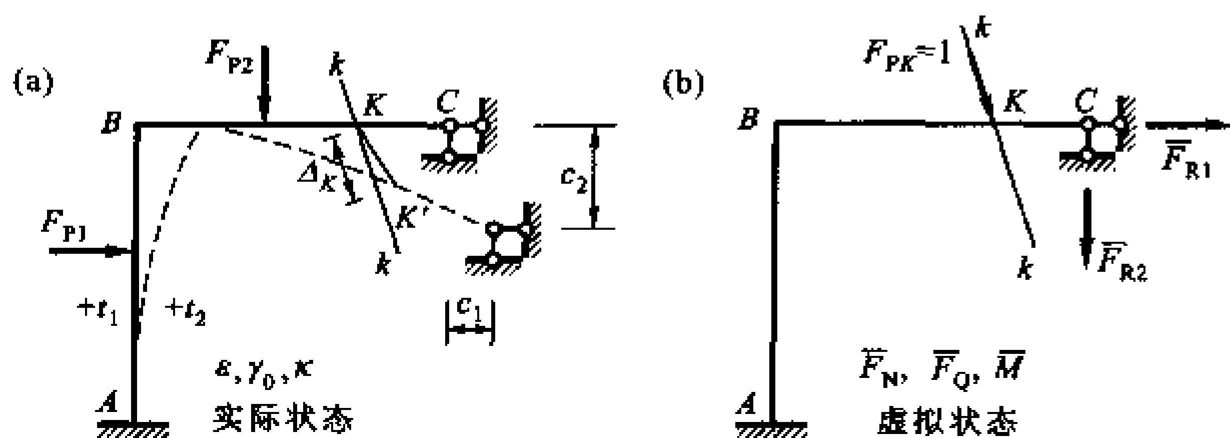


图 5-7

若将实际状态中结构的真实位移视作虚拟平衡状态的虚位移,则外力虚功为

$$\delta W_e = 1\cdot\Delta_K + \sum\bar{F}_R c$$

上式右端第一项是上述单位荷载在实际变形状态位移上所作的虚功;第二项为虚拟平衡状态的支座反力在实际状态的各支座位移上所作的虚功。这样,就可以将式(5-3)的虚功方程改写为

$$\Delta_K = \sum\int(\bar{F}_N\varepsilon + \bar{F}_Q\gamma_0 + \bar{M}\kappa)\mathrm{d}s - \sum\bar{F}_R c \qquad (5-4)$$

式中ε、γ_0和κ分别为实际状态结构杆件的轴向应变、平均剪切应变和曲率。式(5-4)便是平面杆系结构位移计算的一般公式。只要求得虚拟平衡状态结构的内力$\bar{F}_N$、$\bar{F}_Q$、$\bar{M}$和反力$\bar{F}_R$,又已知了实际变形状态的支座位移和杆件的轴向应变、平均剪切应变和曲率,就可以利用式(5-4)计算出位移Δ_K。这种通过虚设单位荷载作用下的平衡状态,利用虚功原理求结构位移的方法称为单位荷载法。

由以上分析可知,利用虚功原理求结构位移这一方法的实质,是将结构的实际位移作为虚拟平衡状态的虚位移。需要特别强调的是,结构的实际位移并非是无限小量,而是有限量。因此,将实际位移视作虚位移已不严格满足虚功原理的前提条件。只有当实际位移相对于结构的原有尺度来说很小,采用这一位移计算方法才不至于造成明显的误差。或者说,单位荷载法仅仅适用于小变形问题。当结构的实际变形属大变形时,常可以将荷载一变形路径分成若干个小段,采用增量的方法利用式(5-4)求得结构位移的近似值。

在实际问题中,除了计算线位移外,还常需要计算角位移、相对位移等。在用单位荷载法建立虚拟的平衡状态时,需注意单位荷载应是与所求广义位移相应的广义力。而所谓的相应,是指力与位移在作功的关系上的对应,例如与线位移相对应的是集中力,与角位移相对应的是力偶等。另需注意的是,应使单位荷载仅在所求的广义位移上作功,而且使所作的功就等于所求位移本身。否则就不能直接应用式(5-4)来计算结构的指定位移。

以图5-8a所示的刚架为例,若需求K点的竖向或水平位移分量,虚拟状态中的单位荷载应分别如图5-8b或c所示,即在K点施加竖向或水平方向的单位力;若需求K截面的角位移,则虚拟状态中应在K点施加一个单位力矩(图5-8d);而图5-8e和f所示的虚拟状态,是分别用于计算J、K两点在其连线方向的相对线位移和J、K截面之间的相对角位移。

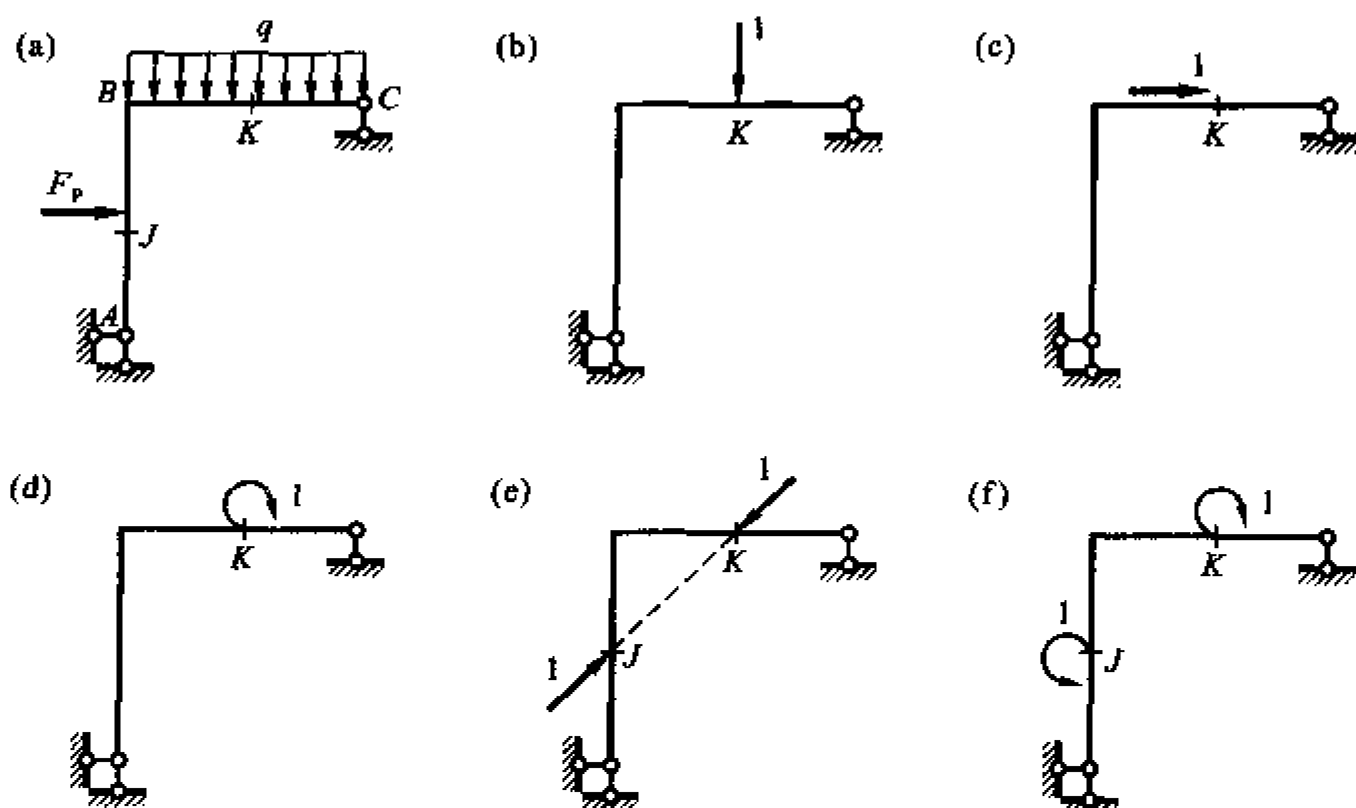


图 5-8

在求桁架结点的线位移时,同样可以按照上述做法建立虚拟状态。以图5-9a所示桁架为例,若需求C结点的竖向位移或D、E两结点距离的变化,应分别采用图5-9b或c所示的虚拟状态。在求桁架某杆件的角位移时,由于杆件只承受轴力,建立虚拟状态时应在该杆件的两端施加一对作用线与杆件垂直、大小等于杆长倒数而指向相反的集中力以构成单位力矩,如图5-9d所示。而图5-9e所示的虚拟状态,可用于计算桁架CF杆与CD杆之间的相对角位移。

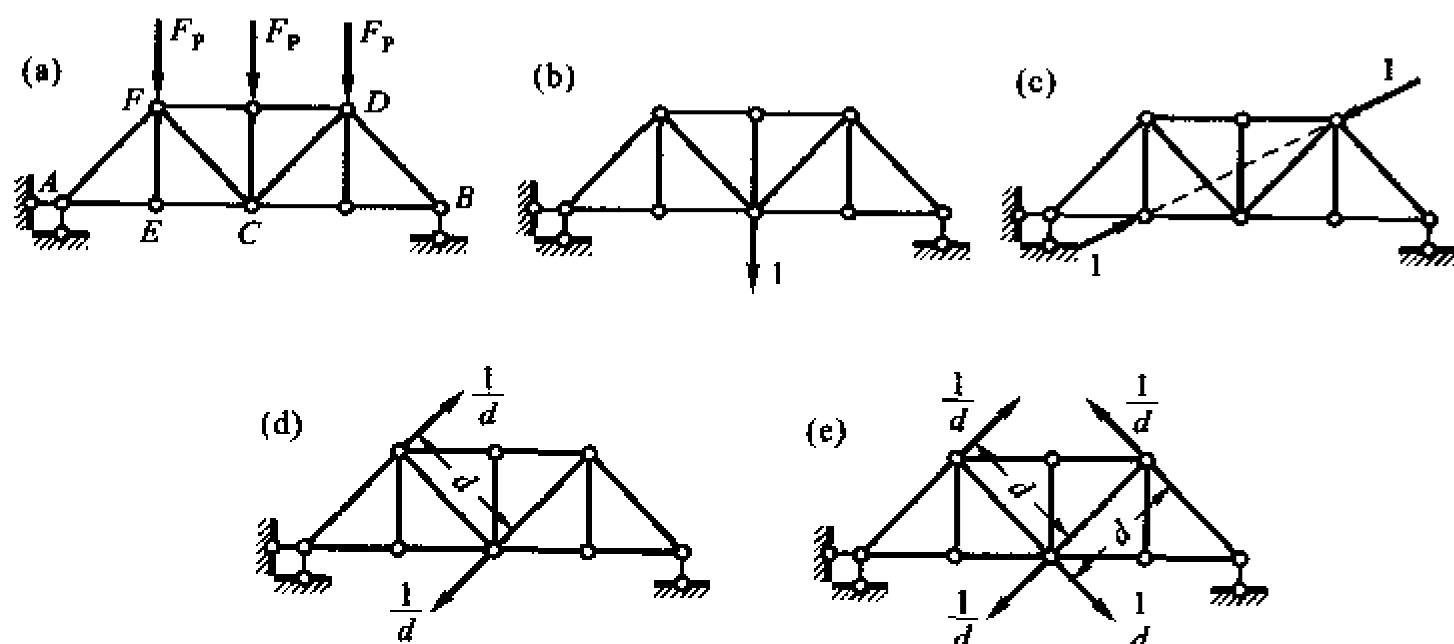


图 5-9

§5-4 静定结构在荷载作用下的位移计算

当仅有荷载作用时,式(5-4)的位移计算一般公式可简化为

$$\Delta_K = \sum \int (\overline{F}_N \epsilon + \overline{F}_Q \gamma_0 + \overline{M} \kappa) \mathrm{d}s \tag{a}$$

式中 $\overline{F}_N$、$\overline{F}_Q$和 $\overline{M}$ 为虚拟状态中由单位荷载引起的结构内力；ϵ、γ_0和 κ 为实际状态中由荷载引起的杆件微段的轴向应变，平均剪切角和曲率，即微段的变形率。设以 F_{NP}、F_{QP}、M_P表示实际状态中杆件的内力，对于直杆当在线弹性范围内，按照材料力学有

$$\epsilon = \frac{F_{NP}}{EA}, \quad \gamma_0 = k\frac{F_{QP}}{GA}, \quad \kappa = \frac{M_P}{EI} \tag{b}$$

式中 E 和 G 分别为材料的弹性模量和切变模量；A 和 I 分别为杆件横截面的面积和惯性矩（截面二次轴矩）；k 是因切应力沿截面分布不均匀而引用的与截面形状有关的系数。EA、GA 和 EI 分别代表了杆件截面的轴向、剪切刚度和弯曲刚度。截面系数 k 的计算公式为

$$k = \frac{A}{I^2}\int_A \frac{S^2}{b^2}\mathrm{d}A \tag{c}$$

式中 b 为切应力取值点处截面的宽度，S 为切应力取值点以下（或以上）面积对截面中性轴的静矩（截面一次矩）。对于矩形截面，有 $k=1.2$；圆形截面 $k=10/9$；工字型截面 $k=A/A_1$（A_1为腹板面积）。

对于常见的曲杆结构，杆件是属于小曲率的，即杆件截面高度 h 与曲率半径 R 相比很小（$h/R<1/5$）。此时，可以忽略曲率对变形的影响，仍采用式(b)计算杆件微段的变形率。

将式(b)代入式(a)，并将方程右端的三项分列，则得

$$\Delta_K = \sum \int \frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA}\mathrm{d}s + \sum \int \frac{k\overline{F}_Q F_{QP}}{GA}\mathrm{d}s + \sum \int \frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s \tag{5-5}$$

式(5－5)即为平面杆系结构在荷载作用下的位移计算公式。由此可见，只要分别求得结构在虚拟状态单位荷载作用下的内力和在实际状态荷载作用下的内力，就可以利用式(5－5)计算任意的指定位移。

式(5－5)等号右边的三项分别代表了杆件的轴向变形、剪切变形和弯曲变形对结构位移的影响。在实际计算中，根据结构杆件的受力性质以及上述三种变形对结构位移影响的大小，常只需考虑其中的一项（或两项）。例如，

(1) 梁和刚架

在梁和刚架中，位移主要是由弯曲变形引起的，轴向变形和剪切变形的影响一般很小，可以略去。这样，式(5－5)可简化为

$$\Delta_K = \sum \int \frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s \tag{5-6}$$

(2) 桁架

在桁架中，各杆只受轴力，而且每一杆件的轴力和截面一般是沿杆长不变的，故其位移计算公式可简化为

$$\Delta_K = \sum \frac{\overline{F}_N F_{NP} l}{EA} \tag{5-7}$$

(3) 组合结构

在组合结构中，有刚架式杆和只承受轴力的链杆两种不同性质的杆件。对于刚架式杆，一般可只考虑弯曲变形的影响，而对于链杆则应考虑其轴向变形的影响。此时，位移计算公式简化为

$$\Delta_K = \sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}ds + \sum\frac{\overline{F}_N F_{NP} l}{EA} \tag{5-8}$$

(4) 拱

对于拱，当忽略拱轴曲率的影响时，其位移仍可近似地按式(5-5)计算。计算表明，通常只需考虑弯曲变形的影响。但当拱轴线与压力线比较接近(两者的距离与截面高度相当)，或者是计算扁平拱($f/l<1/5$)中的水平位移时，则还需要考虑轴向变形的影响，即有

$$\Delta_K = \sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}ds + \sum\int\frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA}ds \tag{5-9}$$

最后值得一提的是，本节中所列出的荷载作用下的位移计算公式不仅适用于静定结构，也同样适用于超静定结构。

例 5-1 试求图 5-10a 所示简支梁中点 C 的竖向位移 Δ_{yC} 和转角 θ_C，并比较剪切变形和弯曲变形对位移的影响。设梁的横截面为矩形，截面宽度为 b、高度为 h，材料的切变模量 $G=0.4E$。

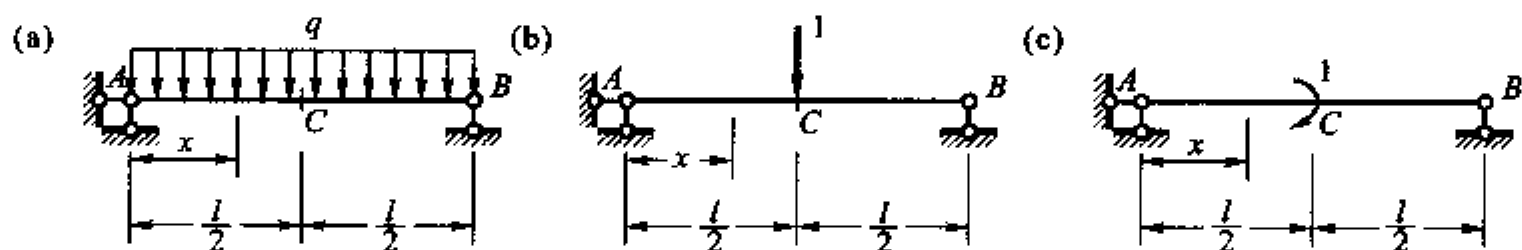


图 5-10

解 求梁中点 C 的竖向位移时，取虚拟状态如图 5-10 b 所示。在对称的竖向荷载作用下，梁中的弯矩和剪力也是对称的。取支座 A 为坐标原点，当 $0\leqslant x\leqslant l/2$ 时，实际状态和虚拟状态下梁的内力可分别表示为

$$M_P = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2,\quad F_{QP} = \frac{1}{2}ql - qx$$

$$\overline{M} = \frac{1}{2}x,\quad \overline{F}_Q = \frac{1}{2}$$

将以上各式代入式(5-5)，注意到内力对称时，梁左右两半的积分值应相等，有

$$\begin{aligned}\Delta_{yC} &= 2\left[\int_0^{l/2}\frac{\overline{M}M_P}{EI}dx + \int_0^{l/2}\frac{k\overline{F}_Q F_{QP}}{GA}dx\right]\\ &= 2\left[\frac{1}{EI}\int_0^{l/2}\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2\right)dx + \frac{k}{GA}\int_0^{l/2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ql - qx\right)dx\right]\\ &= \frac{5ql^4}{384EI} + \frac{kql^2}{8GA}\ (\downarrow)\end{aligned}$$

计算结果为正值，表明 C 点的竖向位移与虚拟单位荷载的方向相同，即为向下。以上第一项为弯曲变形对 C 点竖向位移的影响，第二项为剪切变形的影响。

将 $A=bh$，$I=\frac{bh^3}{12}$，$k=1.2$，$G=0.4E$ 代入以上 Δ_{yC} 的表达式，得

$$\Delta_{yC} = \frac{5ql^4}{384EI}\left[1+2.4\left(\frac{h}{l}\right)^2\right]\ (\downarrow)$$

以上计算结果表明，剪切变形对位移的影响随梁的高跨比 h/l 的增大而加大。当梁的高跨比 $\frac{h}{l}=\frac{1}{10}$ 时，剪切变形的影响为弯曲变形的 2.4%。可见，对于截面高度远小于跨度的一般工程梁来说，可以忽略剪切变形对位移的影响；但对于深梁来说，剪切变形的影响常不容忽视。

由于简支梁在全跨均布荷载作用下变形与内力都是对称的，所以梁中点应无转角发生。图 5-10c 的虚拟

状态中梁的内力应是反对称的，按照式(5-5)进行积分同样可求得 $\theta_C=0$。

例 5-2　试求图 5-11a 所示半径为 R 的圆弧形曲杆 B 端的竖向位移 Δ_{yB}。已知曲杆的 EI、EA、GA 均为常数。设曲杆的横截面为矩形($b\times h$)，$\frac{h}{R}=\frac{1}{10}$，材料的切变模量 $G=0.4E$。

解　实际状态中曲杆上任一截面 C 处的内力可借助于隔离体图(图 5-11b)表达为

$$M_P=F_PR\sin\varphi,\quad F_{NP}=-F_P\sin\varphi,\quad F_{QP}=F_P\cos\varphi$$

求 B 点的竖向位移时，取虚拟状态如图 5-11c 所示。此时，杆件的截面内力为

$$\overline{M}=R\sin\varphi,\quad \overline{F}_N=-\sin\varphi,\quad \overline{F}_Q=\cos\varphi$$

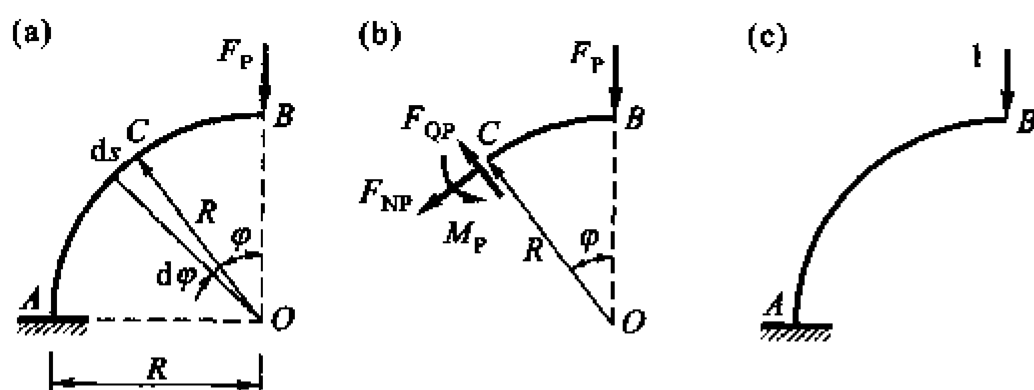


图　5-11

将以上两种状态的内力表达式代入式(5-5)，得

$$\begin{aligned}\Delta_{yB}&=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}ds+\sum\int\frac{\overline{F}_NF_{NP}}{EA}ds+\sum\int\frac{k\overline{F}_QF_{QP}}{GA}ds\\&=\frac{F_PR^3}{EA}\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi+\frac{F_PR}{EA}\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi+\frac{kF_PR}{GA}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi d\varphi\\&=\frac{\pi F_PR^3}{4EI}+\frac{\pi F_PR}{4EA}+\frac{k\pi F_PR}{4GA}\ (\downarrow)\end{aligned}$$

以上第一、二、三项分别为弯曲变形、轴向变形和剪切变形对 B 端竖向位移的影响。将已知条件代入上式，则得

$$\begin{aligned}\Delta_{yB}&=\frac{\pi F_PR^3}{4EI}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{h}{R}\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2\right]\\&=\frac{\pi F_PR^3}{4EI}\left(1+\frac{1}{400}+\frac{1}{1\ 200}\right)\ (\downarrow)\end{aligned}$$

可见轴向变形和剪切变形的影响都很小，一般可以忽略。

例 5-3　试计算图 5-12a 所示桁架支座结点 B 的水平位移 Δ_{xB}。设各杆的 EA 均相同。

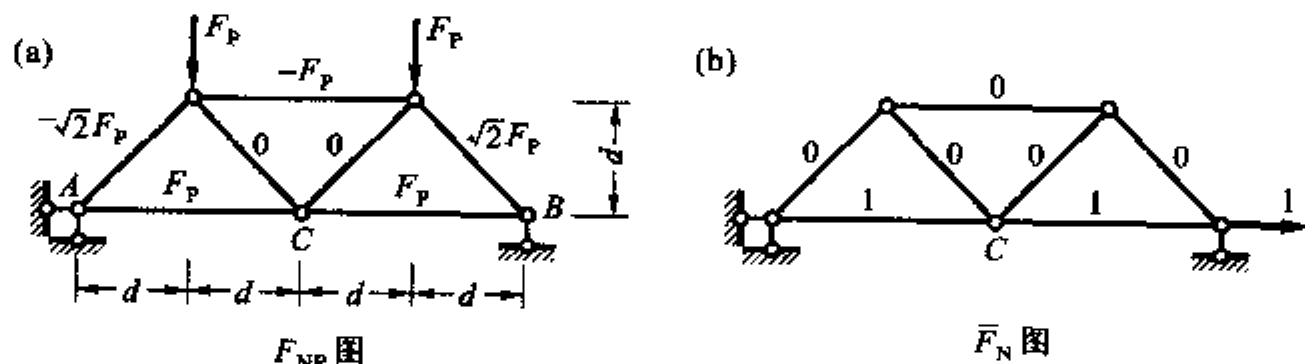


图　5-12

解　实际状态(图 5-12a)桁架内力对称，虚拟状态(图 5-12b)桁架仅有下弦杆受拉。由式(5-7)可得

$$\Delta_{xB}=\frac{1}{EA}\sum\overline{F}_{N}F_{NP}l=\frac{1}{EA}(2\times1\times F_{P}\times2d)$$
$$=4\frac{F_{P}d}{EA}\ (\rightarrow)$$

§5－5 图 乘 法

在计算梁和刚架在荷载作用下的位移时，常需要求积分

$$\int\frac{\overline{M}M_{P}}{EI}ds \tag{a}$$

当结构杆件数量较多而荷载情况又较复杂时，以上的弯矩列式和积分工作将相当烦琐。实际的工程结构大多是由等截面的直杆构成的。此时，一般可以用以下图乘法来代替积分运算，从而简化计算工作。

构件为直杆时，结构在虚拟状态中由单位荷载引起的弯矩图形是由直线段构成的。不失一般性，可以从中取出一杆段 AB，实际状态和虚拟状态中该杆段的弯矩如图 5－13 所示。若 AB 段内杆件截面的弯曲刚度 EI 为常数，则对于图示坐标系有

$$\int\frac{\overline{M}M_{P}}{EI}ds=\frac{1}{EI}\int\overline{M}M_{P}dx$$
$$=\frac{1}{EI}\tan\alpha\int xM_{P}dx$$
$$=\frac{1}{EI}\tan\alpha\int x dA \tag{b}$$

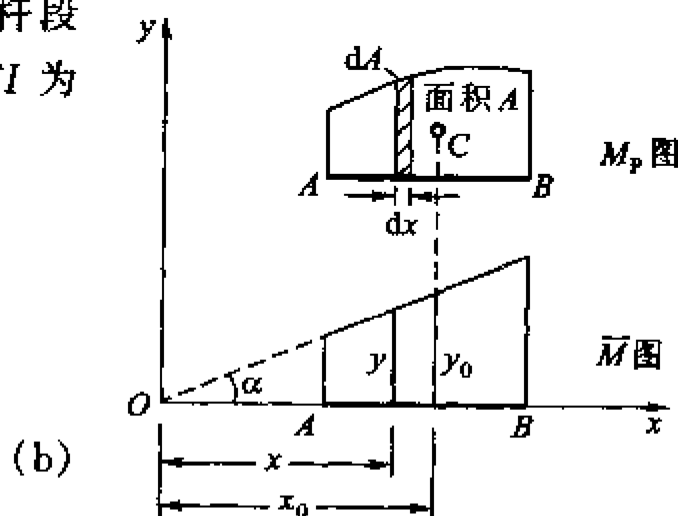


图 5－13

式中 $dA=M_{P}dx$ 为 M_P 图中的微分面积，而积分 $\int x dA$ 就是 M_P 图的面积对于 y 轴的静矩。用 x_0 表示 M_P 图的形心 C 至 y 轴的距离，则有

$$\int x dA=Ax_{0} \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，并考虑到 $x_0\tan\alpha=y_0$ 的关系，有

$$\int\frac{\overline{M}M_{P}}{EI}ds=\frac{Ay_{0}}{EI} \tag{5-10}$$

式中 y_0 为 M_P 图的形心位置 C 所对应的 $\overline{M}$ 图中的竖标。

由式(5－10)可知，在计算由弯曲变形引起的位移时，可以用荷载弯矩图(M_P 图)的面积 A 乘以其形心位置对应的单位弯矩图($\overline{M}$ 图)中的竖标 y_0，再除以杆件截面的弯曲刚度 EI。当面积 A 与竖标 y_0 在基线的同侧时应取正号，在异侧时应取负号。这种按图形计算代替积分运算的位移计算方法就称为图形相乘法，简称为图乘法。

根据以上的推导过程可知，图形相乘法只适用于等截面直杆段的情况，而且杆段的两个弯矩图中至少应有一个是直线。当杆件或其弯矩的图形在分段后才能满足上述适用条件时，可以按照积分运算的规则分段图乘，然后将分段图乘的结果相加。应当注意的是，y_0 只能取自直线图形，而 A 应取自另一图形。

其中

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}al, & A_2 &= \frac{1}{2}bl \\ y_1 &= \frac{2}{3}c+\frac{1}{3}d, & y_2 &= \frac{1}{3}c+\frac{2}{3}d \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

将式(e)代人式(d)可得

$$\frac{1}{EI}\int \overline{M}M_{\mathrm{P}}\mathrm{d}s = \frac{1}{6EI}(2ac+2bd+ad+bc) \tag{f}$$

式(f)也可以适用于图 5-15b 所示，弯矩图形位于基线两侧时的情况。此时，式中括号内各项的正、负号应按照在基线同侧竖标相乘取正、异侧竖标相乘取负的原则确定。式(f)也适用于一端竖标为零，即图形为三角形时的情况。

图 5-16a 所示为杆件受端弯矩和均布荷载共同作用下的弯矩图。在采用图乘法计算时，可以将此 M_{P}图视为端弯矩作用下的梯形弯矩图(图 5-16b)与相应简支梁在均布荷载作用下标准抛物线形的弯矩图(图 5-16c)叠加而成。将上述两个图形分别与 $\overline{M}$ 图相乘，其代数和即为所求结果。

应当注意的是，所谓弯矩图的叠加是指其竖标的叠加。叠加后的抛物线图形虽与原标准抛物线的形状不相同，但在任一微段 $\mathrm{d}x$ 上两者对应的竖标均相同，因而两者的面积和形心位置都是相同的。在确定图 5-16a 虚线以下抛物线的面积和重心位置时，可以采用相应标准抛物线的计算公式。

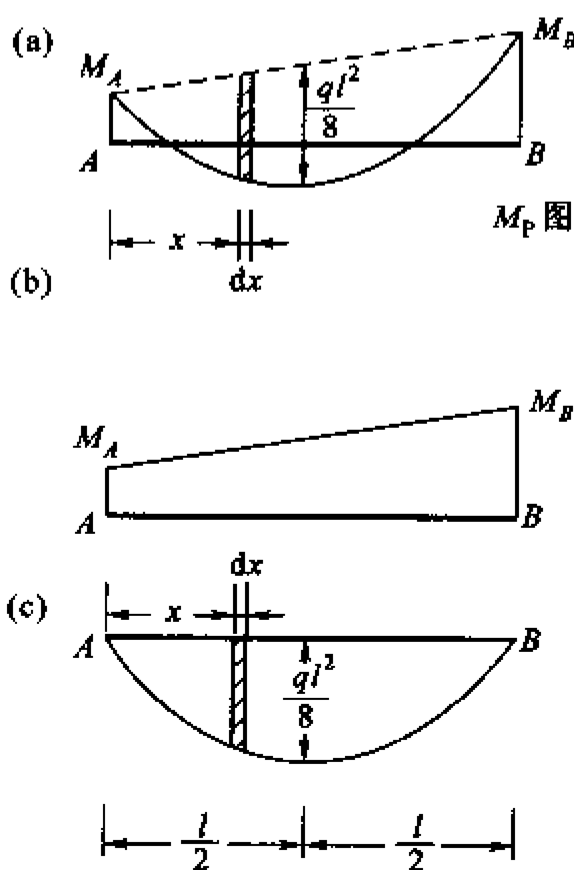


图 5-16

例 5-4 试求图 5-17a 所示悬臂梁 C 点的竖向位移 Δ_{yC}。设 EI = 常数。

解 作出悬臂梁在均布荷载作用下的 M_{P}图和单位荷载作用下的 $\overline{M}$ 图，如图 5-17b 和 d 所示。

方法一：由于 $\overline{M}$ 图是折线，一般需分段图乘。因 CB 段 $\overline{M}=0$，所以只需将 M_{P}图在 AC 段的图形分解为一个矩形、一个三角形和一个标准抛物线形(图 5-17b)，其面积以及重心位置对应的 $\overline{M}$ 图竖标分别为

$$A_1=\frac{l}{2}\times\frac{ql^2}{8}=\frac{ql^3}{16},\quad A_2=\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{ql^2}{4}=\frac{ql^3}{16},\quad A_3=\frac{1}{3}\times\frac{l}{2}\times\frac{ql^2}{8}=\frac{ql^3}{48}$$

$$y_1=\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}=\frac{l}{4},\quad y_2=\frac{2}{3}\times\frac{l}{2}=\frac{l}{3},\quad y_3=\frac{3}{4}\times\frac{l}{2}=\frac{3l}{8}$$

以上的竖标与相应面积同位于基线上方，图乘结果均应取正号。于是，C 点的竖向位移为

$$\Delta_{yC}=\frac{1}{EI}\left[\frac{ql^3}{16}\times\frac{l}{4}+\frac{ql^3}{16}\times\frac{l}{3}+\frac{ql^3}{48}\times\frac{3l}{8}\right]=\frac{17ql^4}{384EI}\ (\downarrow)$$

实际上 M_{P}图在 AC 段的上述三个弯矩图形，是由图 5-17c 所示隔离体中作用 C 点的弯矩、剪力以及 AC 段上的均布荷载分别引起的。

方法二：AC 段上的 M_{P}图也可以如图 5-17e 所示，看作是从一个梯形上减去一个标准抛物线图形。利用式(f)，并注意到标准抛物线图形与其重心位置对应的 $\overline{M}$ 图竖标位于基线的异侧，有

$$\Delta_{yC}=\frac{l}{12EI}\left(2\times\frac{ql^2}{2}\times\frac{l}{2}+0+0+\frac{ql^2}{8}\times\frac{l}{2}\right)-\frac{1}{EI}\times\frac{2}{3}\times\frac{l}{2}\times\frac{ql^2}{32}\times\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}=\frac{17ql^4}{384EI}\ (\downarrow)$$

以上结果与方法一中所得结果相同。此外，还可以有其他的图形分解方法。

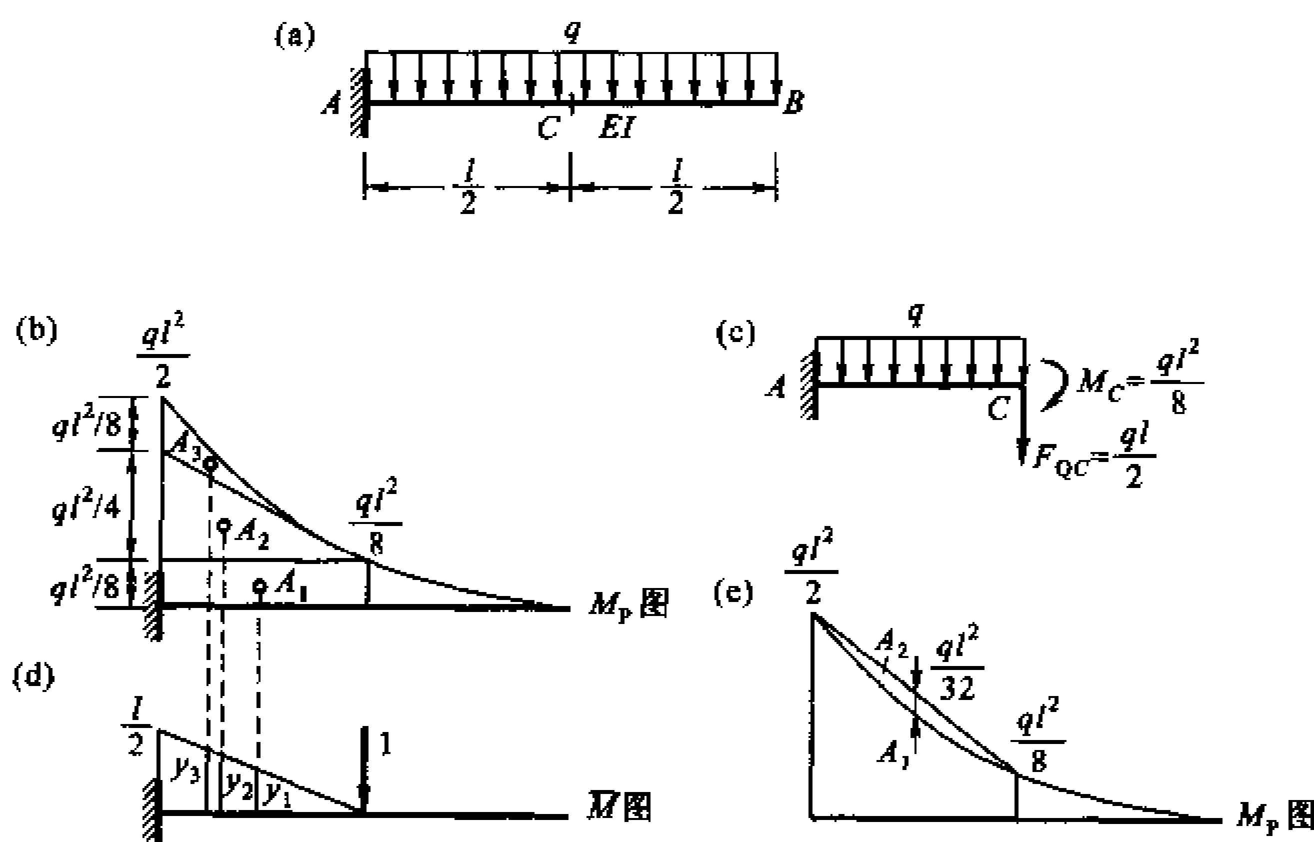


图 5-17

例 5-5 试求图 5-18a 所示组合结构 K 点处的竖向位移 Δ_{yK}。已知 $E=2.1\times10^5$ MPa，$I=1.6\times10^{-4}$ m^4，CD 杆 $A=5.0\times10^{-4}$ m^2。

解 组合结构的位移计算应采用式(5-8)，其中弯矩乘积的积分仍可利用图乘法计算。

作出 M_P图、$\overline{F}_{NP}$ 和 $\overline{M}$ 图、F_N，分别如图 5-18b 和 c 所示。由于 CB 段 $\overline{M}=0$，仅 AC 段需作图乘运算。又因为 AC 段中 M_P图为直线，而 $\overline{M}$ 图却是折线，所以图乘时为避免分段计算，可以取 $\overline{M}$ 图的面积乘以其相应的 M_P图中的竖标更为方便。注意，$\overline{M}$ 图和 M_P图位于基线异侧，而两种状态下 CD 杆均为受拉，有

$$\Delta_{yK}=-\frac{1}{EI}\times\frac{1}{2}\times4\ \text{m}\times1\ \text{m}\times\frac{1}{2}\times160\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m}+$$

$$\frac{1}{EA}\times\frac{1}{2}\times120\times10^3\ \text{N}\times2\ \text{m}$$

$$=-\frac{160\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m}}{2.1\times10^5\ \text{MPa}\times1.6\times10^{-4}\ \text{m}^4}+\frac{120\times10^3\ \text{N}\cdot\text{m}}{2.1\times10^5\ \text{MPa}\times5.0\times10^{-4}\ \text{m}^2}$$

$$=-4.76\times10^{-3}\ \text{m}+1.14\times10^{-3}\ \text{m}$$

$$=-3.62\times10^{-3}\ \text{m}\ (\uparrow)$$

由此可见，由横梁弯曲变形引起的 K 点的竖向位移是向上的，即与所设单位荷载的方向相反；而由 CD 杆受拉伸长引起的 K 点的竖向位移是向下的，其数值就等于该杆伸长量的 $\frac{1}{2}$。K 点的实际位移即为上述两项位移的代数和。

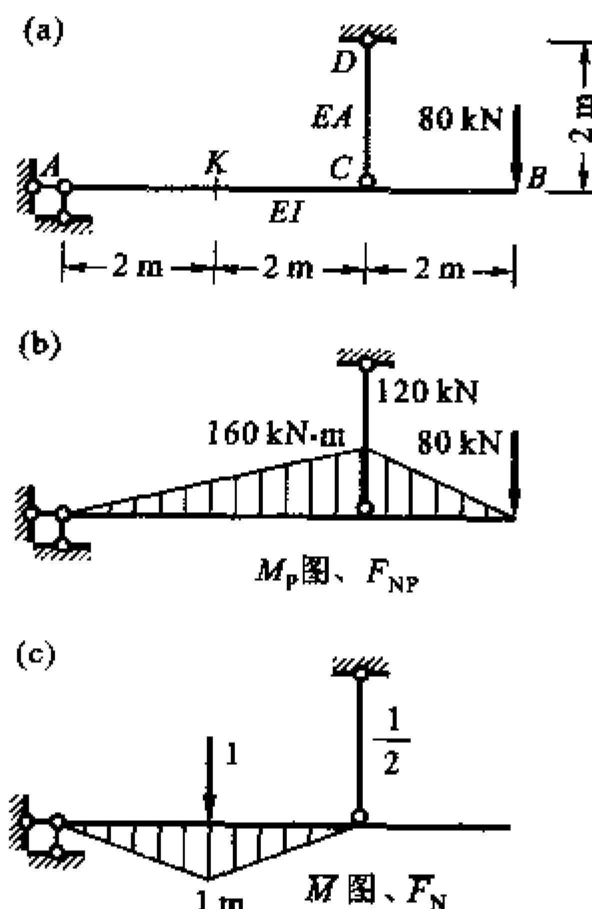


图 5-18

例 5-6 试求图 5-19a 所示刚架 B 点的水平位移 Δ_{xB} 和铰 F 左、右杆件截面间的相对转角 $\Delta_{\theta F}$。设各杆件 EI 相同。

解 先在求解此静定刚架的基础上，分别作出实际荷载作用下的 M_P图和两种单位荷载作用下的 $\overline{M}$ 图，分别如图 5-19b 和 c、d 所示。

图 5－19b 中 FD 段的弯矩图是由铰 C 处的剪力和杆件所受均布荷载共同引起的，可以分解为一个三角形和一个标准抛物线形；AC 段的弯矩图是由杆端弯矩引起的，可以视作是两个杆端弯矩单独作用所引起的弯矩图叠加而成，即从 AC 杆以右的三角形中扣除以虚线为基线的另一个三角形。

在 M_P 图中各杆段上有

$$A_1=\frac{1}{2}\times5\ \text{m}\times50\ \text{kN·m},\quad A_2=A_4=\frac{1}{2}\times5\ \text{m}\times25\ \text{kN·m},\quad A_3=\frac{1}{3}\times5\ \text{m}\times25\ \text{kN·m}$$

$$A_5=\frac{1}{2}\times10\ \text{m}\times10\ \text{kN·m},\quad A_6=\frac{1}{2}\times10\ \text{m}\times20\ \text{kN·m},\quad A_7=\frac{1}{2}\times5\ \text{m}\times35\ \text{kN·m}$$

以上面积图形的形心位置对应图 5－19c 单位弯矩图中的竖标为

$$y_1=\frac{5}{6}\times10\ \text{m},\quad y_2=y_4=\frac{2}{3}\times10\ \text{m},\quad y_3=\frac{3}{4}\times10\ \text{m}$$

$$y_5=10\ \text{m}+\frac{1}{3}\times10\ \text{m}=\frac{4}{3}\times10\ \text{m},\quad y_6=10\ \text{m}+\frac{2}{3}\times10\ \text{m}=\frac{5}{3}\times10\ \text{m},\quad y_7=0$$

按照图形与相应竖标在基线同侧时乘积取正，异侧时乘积取负的规则，有

$$\Delta_{xB}=\frac{1}{EI}(A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3+A_4y_4-A_5y_5+A_6y_6)$$

$$=\frac{3\ 188\ \text{kN·m}^3}{EI}\ (\leftarrow)$$

荷载弯矩图形的形心位置对应图 5－19d 单位弯矩图中的竖标为

$$y_1=0,\quad y_2=\frac{1}{3},\quad y_3=\frac{1}{4},\quad y_4=\frac{5}{6}\times2,\quad y_5=y_6=2,\quad y_7=0$$

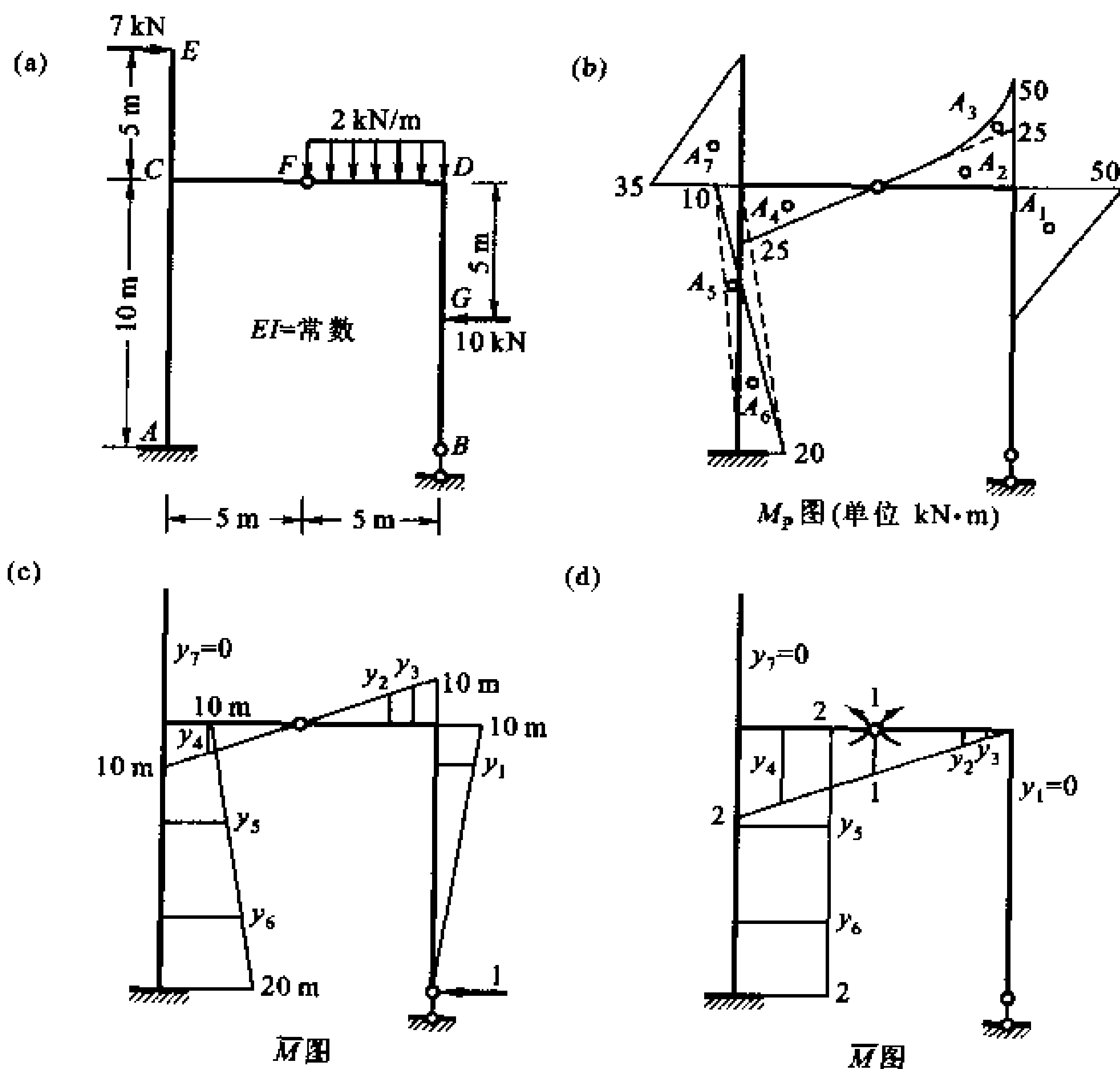


图 5－19

于是,有

$$\Delta_{\theta F}=\frac{1}{EI}(-A_2y_2-A_3y_3+A_4y_4-A_5y_5+A_6y_6)$$
$$=\frac{2\ 075\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{12EI}\ (\ )(\ )$$

§5-6 静定结构在非荷载因素作用下的位移计算

静定结构受到温度变化、支座位移、材料收缩和制造误差等非荷载因素的作用时,虽然不产生内力,但会产生位移。这种位移仍然可以利用单位荷载法及其相应的位移计算一般公式(5-4)计算,所不同的是,被视作虚位移的实际状态的变形和位移并不是由荷载产生,而是由上述非荷载因素所引起。

对于线弹性体系来说,位移符合叠加原理。因此,当有几种因素同时作用时,可以用叠加的方法求得结构的最终位移。

5-6-1 由于温度变化、制作误差等引起的位移

静定结构受温度变化作用时,各杆件均能自由变形而不会产生内力。只要能求得杆件各微段因材料热胀冷缩所引起变形的表达式,并将这种变形视作虚拟平衡状态的虚位移,即可利用式(5-4)求得结构的位移。

现从结构杆件上截取任一微段 ds(图5-20),设微段上侧表面温度升高 t_1,下侧表面温度升高 t_2。为简化计算,假定温度沿杆件截面高度 h 按直线规律变化。此时,微段的变形如图5-20虚线所示,截面在变形之后仍将保持为平面。可见,由温度变化引起的杆件变形可以分解为沿杆件轴线方向的伸缩和截面绕中性轴的转动两部分,杆件不存在剪切变形。

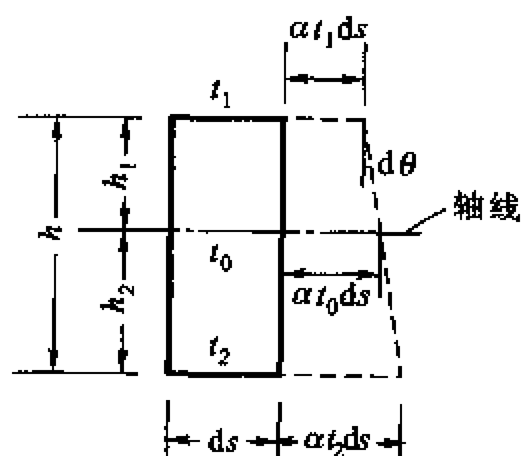


图 5-20

设截面中性轴至微段上、下侧表面的距离分别为 h_1、h_2,中性轴处温度的变化为 t_0,按几何关系可得

$$t_0=\frac{h_1t_2+h_2t_1}{h} \tag{a}$$

若杆件的截面对称于中性轴,即 $h_1=h_2=\frac{h}{2}$,则上式成为

$$t_0=\frac{t_1+t_2}{2} \tag{b}$$

设材料的线膨胀系数为 α,则微段因温度变化引起的轴向应变和曲率可分别表达为

$$\varepsilon=\alpha t_0 \tag{c}$$

$$\kappa=\frac{d\theta}{ds}=\frac{\alpha(t_2-t_1)}{h}=\frac{\alpha\Delta t}{h} \tag{d}$$

式中 $\Delta t=t_2-t_1$ 为杆件上下侧温度变化之差。将以上式(b)、(c)代入式(5-4),注意到平均切应变 $\gamma_0=0$ 和支座位移 $c=0$,并以 Δ_{Kt} 代替 Δ_K,表示由温度变化引起的位移,得

$$\Delta_{Kt}=\sum\int\overline{F}_{N}\alpha t_{0}\mathrm{d}s+\sum\int\overline{M}\frac{\alpha\Delta t}{h}\mathrm{d}s \tag{5-11}$$

上式等号右边的第一项表示平均温度变化引起的位移;第二项则表示杆件上下侧温度变化之差引起的位移。式(5-11)就是计算静定结构由于温度变化引起位移的计算公式。若杆件沿长度温度变化相同并且截面高度不变,则上式可改写为

$$\Delta_{Kt}=\sum\alpha t_{0}\int\overline{F}_{N}\mathrm{d}s+\sum\frac{\alpha\Delta t}{h}\int\overline{M}\mathrm{d}s$$

$$=\sum\alpha t_{0}A_{\overline{F}_{N}}+\sum\frac{\alpha\Delta t}{h}A_{\overline{M}} \tag{5-12}$$

式中 $A_{\overline{F}_N}=\int\overline{F}_N\mathrm{d}s$,为 $\overline{F}_N$图的面积;$A_{\overline{M}}=\int\overline{M}\mathrm{d}s$,为 $\overline{M}$ 图的面积。

在应用式(5-11)和式(5-12)时,等号右边各项的正负号应按功的取值原则确定:当实际状态温度变化引起的变形与虚拟状态内力相应方向一致时,所作虚功为正,应取正号;方向相反时,所作虚功为负,应取负号。

值得注意的是,当求结构由于温度变化而引起位移时,杆件轴向变形和弯曲变形对位移的影响在数值上是相当的,所以一般不能略去轴向变形的影响。

例 5-7 试求图 5-21a 所示结构,由于图示温度变化引起的 D 点的竖向位移 Δ_{yD}。设材料的线膨胀系数为 α,各杆均为矩形截面,截面高度 $h=0.15a$。

解 先作出虚拟状态结构的轴力图和弯矩图,如图 5-21b 和 c 所示。由式(5-12)得

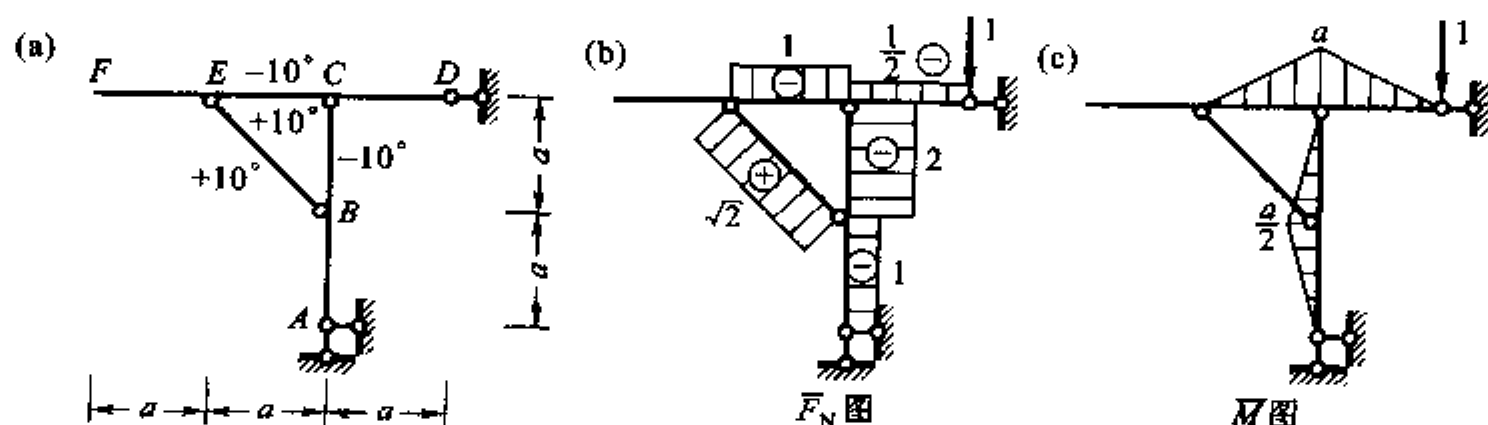


图 5-21

$$\Delta_{yD}=\alpha\times10\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}a+\alpha\times10\times\frac{1}{2}\times a+$$
$$\qquad(BE)\qquad\qquad(CD)$$
$$2\times\alpha\times\frac{20}{0.15a}\times\frac{1}{2}\times a\times\frac{a}{2}-\alpha\times\frac{20}{0.15a}\times\frac{1}{2}a^{2}$$
$$\qquad(AB、BC)\qquad\qquad(EC)$$
$$=25\alpha a\ (\downarrow)$$

以上 EC 杆所对应的项取负值是因为在图 5-21c 所示虚拟状态中该杆为上侧受拉,而实际状态温度变化所引起的变形却方向相反,为向下凸的。

静定结构由于材料收缩或制造误差引起位移的计算,其原理与计算温度变化引起的位移时相同。此时,只需将材料收缩或制造误差引起的实际变形视作虚拟平衡状态的虚位移,即可利用式(5-4)求得结构的位移。

例 5-8 设图 5-22a 所示桁架下弦杆 AE 和 EB 的制作比图示设计尺寸偏长 5‰,试求由此引起的 E 点的

竖向位移 Δ_{yE}。

解　该桁架因杆件制造误差引起的位移如图5-22a虚线所示，结点 E 将移至 E'。为求得 Δ_{yE}，可建立图5-22b所示的虚拟状态。

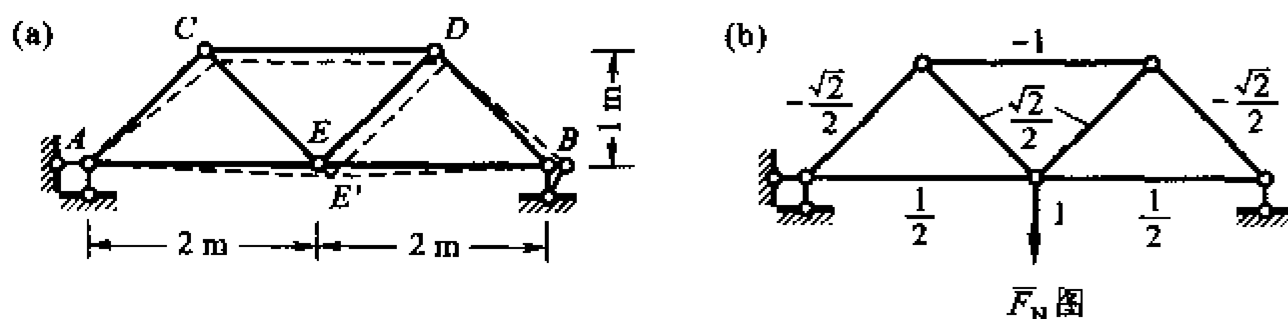


图　5-22

桁架下弦 AE 和 EB 杆由于制造误差引起的轴向应变为 $\varepsilon=\frac{5}{1\,000}$，代入式(5-4)得

$$\Delta_{yE}=\sum\int\overline{F}_N\varepsilon ds=\sum\overline{F}_N\varepsilon l=2\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{1\,000}\times2\ \text{m}=0.01\ \text{m}\ (\downarrow)$$

5-6-2　由支座位移引起的位移

静定结构在支座位移作用下因杆件无变形，故只发生刚体位移。这种位移通常可以直接由几何关系求得；当涉及的几何关系比较复杂时，也可以利用单位荷载法进行计算。现以 Δ_{Kc} 表示结构因支座位移而引起的位移，则式(5-4)可简化为

$$\Delta_{Kc}=-\sum\overline{F}_R c \tag{5-13}$$

这就是静定结构由于支座位移而引起位移的计算公式。式中 $\overline{F}_R$ 代表虚拟状态中的各支座反力，c 为实际状态中与 $\overline{F}_R$ 相应的支座位移。

例5-9　试求图5-23a所示刚架由于支座位移而引起 B 点的水平位移 Δ_{xB}。已知支座 A 有向右水平位移 a 和顺时针转角 θ；支座 B 有竖直向下位移 b。

解　刚架由于支座位移引起的刚体位移如图5-23a虚线所示。为求得 Δ_{xB}，可在 B 点作用单位水平力作为虚拟状态，并求得支座反力如图5-23b所示。

将已知支座位移及其相应虚拟状态中的支座反力代入式(5-13)，得

$$\Delta_{xB}=-\left(-1\cdot a-2h\cdot\theta+\frac{2h}{l}\cdot b\right)$$

$$=a+2h\theta-\frac{2h}{l}b\ (\rightarrow)$$

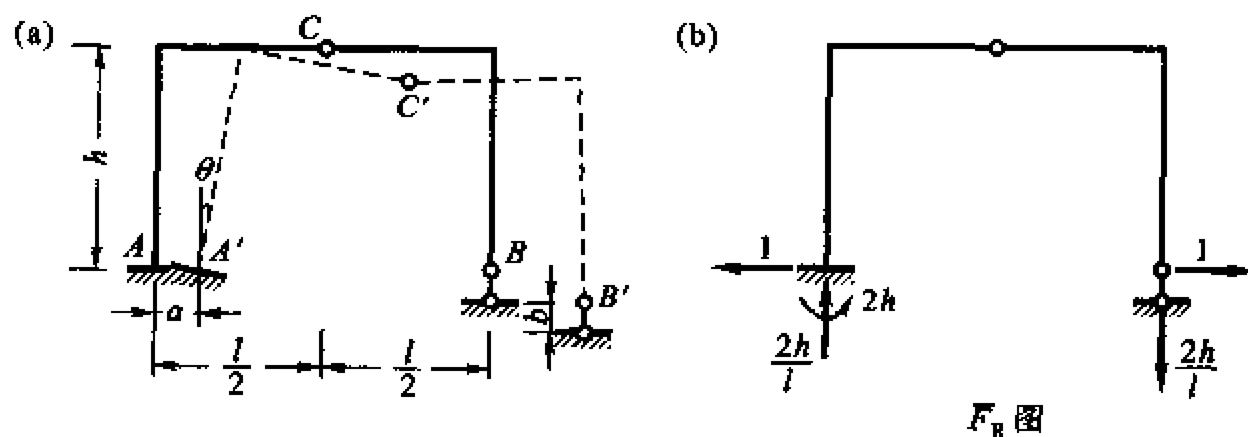


图　5-23

§5－7　线弹性体系的互等定理

5－7－1　功的互等定理

图5－24a、b表示一线弹性体系分别受外力 F_{Pi} 和 F_{Pj} 作用时的两种状态，分别称为状态 i 和状态 j。现考虑这两种力按不同的次序先后作用于该体系时所作的功。假设先加 F_{Pi} 后加 F_{Pj}，体系的变形情况如图5－24c所示。此时，外力所作总功为

$$W_1=\frac{1}{2}F_{Pi}\Delta_{ii}+F_{Pi}\Delta_{ij}+\frac{1}{2}F_{Pj}\Delta_{jj} \tag{a}$$

式中位移 Δ 的第一个下标表示位移序号，第二个下标表示引起该项位移的原因。

若先加 F_{Pj} 后加 F_{Pi}，如图5－24d所示，则外力所作总功为

$$W_2=\frac{1}{2}F_{Pj}\Delta_{jj}+F_{Pj}\Delta_{ji}+\frac{1}{2}F_{Pi}\Delta_{ii} \tag{b}$$

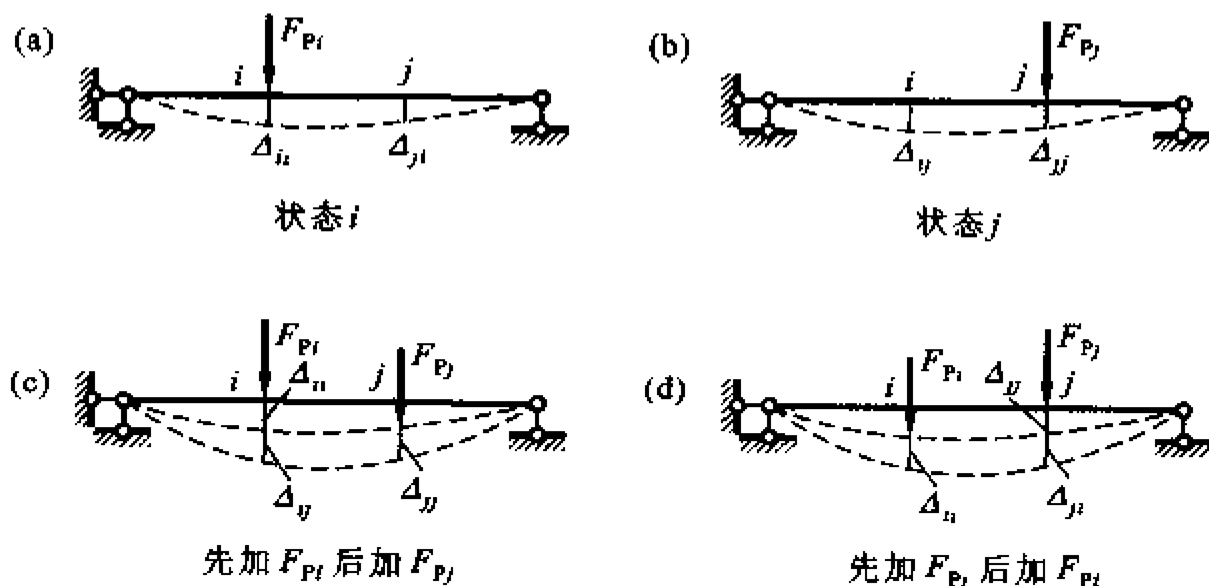


图　5－24

在上述两种加载过程中，外力作用的先后次序虽然不同，但最终的荷载是相同的，根据线弹性体系解的惟一性定理，体系的最终变形情况也是相同的。因此，两种加载情况使体系所储存的变形能也应相同。根据能量守恒，上述两种加载情况外力所作的总功应该相等，即外力所作总功与加载次序无关。故

$$W_1=W_2$$

将式(a)与式(b)代入上式，得

$$\frac{1}{2}F_{Pi}\Delta_{ii}+F_{Pi}\Delta_{ij}+\frac{1}{2}F_{Pj}\Delta_{jj}=\frac{1}{2}F_{Pj}\Delta_{jj}+F_{Pj}\Delta_{ji}+\frac{1}{2}F_{Pi}\Delta_{ii}$$

由此可得

$$F_{Pi}\Delta_{ij}=F_{Pj}\Delta_{ji} \tag{5-14}$$

这就是线弹性体系功的互等定理，它可表述如下：状态 i 的外力在状态 j 的位移上所作的功等于状态 j 的外力在状态 i 的位移上所作的功。

值得注意的是，以上的推理过程实际上已运用了叠加原理，即认为体系在 F_{P_i} 和 F_{P_j} 共同作用下的位移等于它们单独作用时所引起位移的和。这说明了功的互等定理只适用于线弹性体系。另外，F_{P_i} 和 F_{P_j} 可以是广义力，包括是一组外力的情况，此时位移 Δ_{ij} 和 Δ_{ji} 就是与之相应的广义位移。功的互等定理可以适用于杆件体系之外的线弹性连续体。

利用上述线弹性体系功的互等定理，可以导出以下位移互等定理、反力互等定理和反力与位移互等定理。所以，功的互等定理是最基本的互等定理。

5-7-2 位移互等定理

如果作用在体系上的力是一个单位力，即 $F_{P_i}=F_{P_j}=1$，并用 δ 表示由单位力所引起的位移，如图 5-25 所示，则由式(5-14)可得

$$1\cdot\delta_{ij}=1\cdot\delta_{ji}$$

即

$$\delta_{ij}=\delta_{ji} \tag{5-15}$$

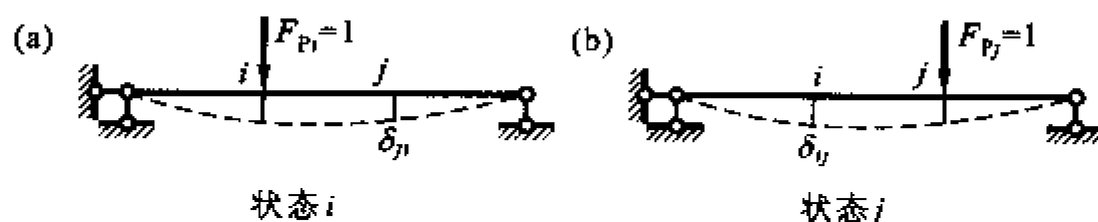


图 5-25

这就是位移互等定理，即第 j 状态的单位力所引起的第 i 状态单位力作用点沿其作用方向的位移，等于第 i 状态的单位力所引起的第 j 状态单位力作用点沿其作用方向的位移。由此可见，位移互等定理只是功的互等定理当 $F_{P_i}=F_{P_j}=1$ 时的一种特殊形式。

5-7-3 反力互等定理

反力互等定理是功的互等定理的另一种特殊形式。它可以用以说明超静定结构在发生单位支座位移时反力的互等关系。例如，图 5-26a 所示体系由于支座 i 处发生单位位移 $\Delta_i=1$，各支座处将产生反力，设在支座 i 处所产生的反力为 r_{ii}，在支座 j 处所产生的反力为 r_{ji}。在图 5-26b 中设在支座 j 处发生单位位移 $\Delta_j=1$，此时，在支座 i 处的反力为 r_{ij}，在支座 j 处的反力为 r_{jj}。以上反力 r 的第一个下标表示反力的序号，第二个下标表示其产生的原因。

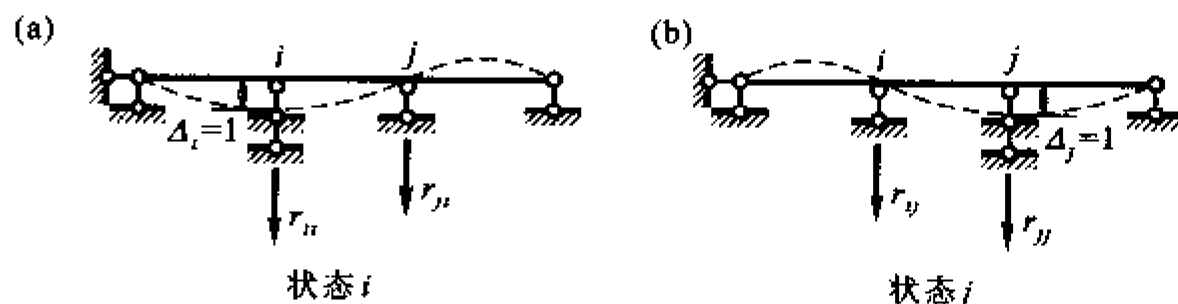


图 5-26

对上述两种状态应用功的互等定理，则得

$$r_{ii}\times 0+r_{ji}\times 1=r_{ij}\times 1+r_{jj}\times 0$$

即

$$r_{ij}=r_{ji} \tag{5-16}$$

这就是反力互等定理，即第 i 个约束沿该约束方向发生单位位移时在第 j 个约束中产生的反力，等于第 j 个约束沿其约束方向发生单位位移时在第 i 个约束中产生的反力。

5-7-4　反力与位移互等定理

反力与位移之间也存在互等关系。例如，图 5-27 所示体系，设在 i 截面处作用一单位力 $F_{P_i}=1$ 时，支座 j 处的反力矩为 r'_{ji}，并设其指向如图 5-27a 所示。然后，再设在支座 j 处沿 r'_{ji} 的方向发生一单位转角 $\theta_j=1$ 时，截面 i 处沿 F_{P_i} 作用方向的位移为 δ'_{ij}，如图 5-27b 所示。对于上述两种状态应用功的互等定理，则得

$$r'_{ji}\times 1+1\times\delta'_{ij}=0$$

即

$$r'_{ji}=-\delta'_{ij} \tag{5-17}$$

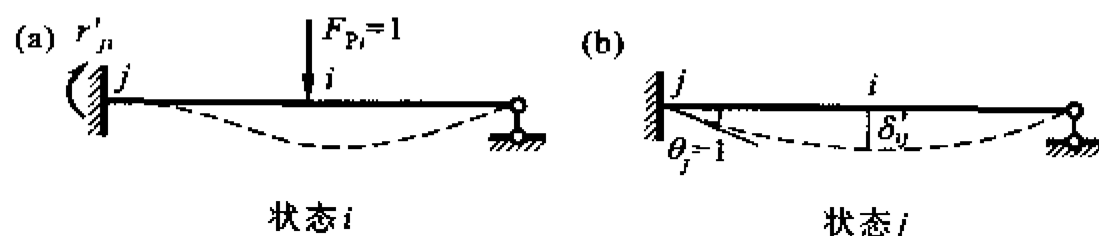


图　5-27

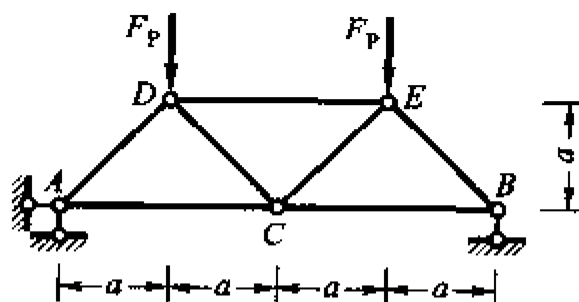
这就是反力与位移互等定理，即由于单位力使体系中某一支座所产生的反力，等于该支座发生与反力方向相一致的单位位移时在单位力作用处所引起的位移，惟符号相反。

习　题

5-1　用单位荷载法计算结构位移时有何前提条件？单位荷载法是否适用于超静定结构的位移计算？

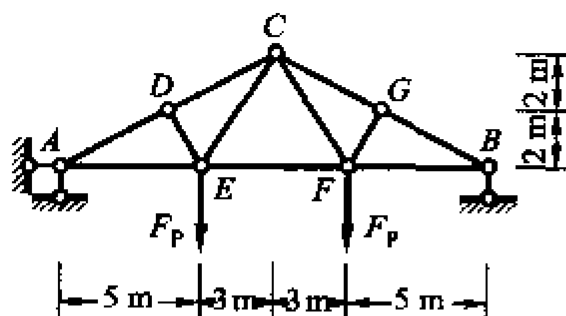
5-2　何为图乘法？采用图乘法代替位移计算的积分运算时有何前提条件？

5-3　试求桁架 C 结点的竖向位移。设各杆件 EA 相同。



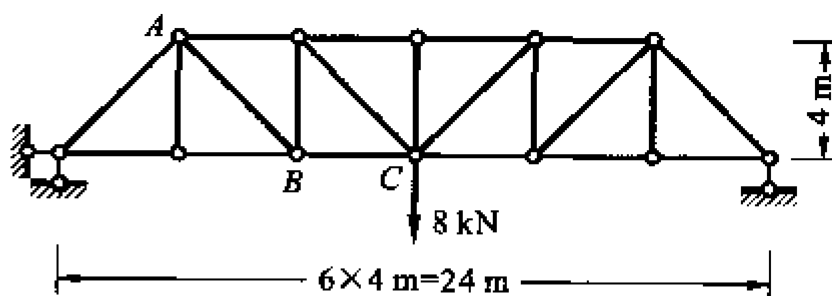
题 5-3 图

5-4　已知桁架各杆截面相同，横截面面积 $A=30\ \mathrm{cm}^2$，$E=20.6\times10^6\ \mathrm{N/cm}^2$，$F_P=98.1\ \mathrm{kN}$。试求 C 点竖向位移 Δ_{yC}。



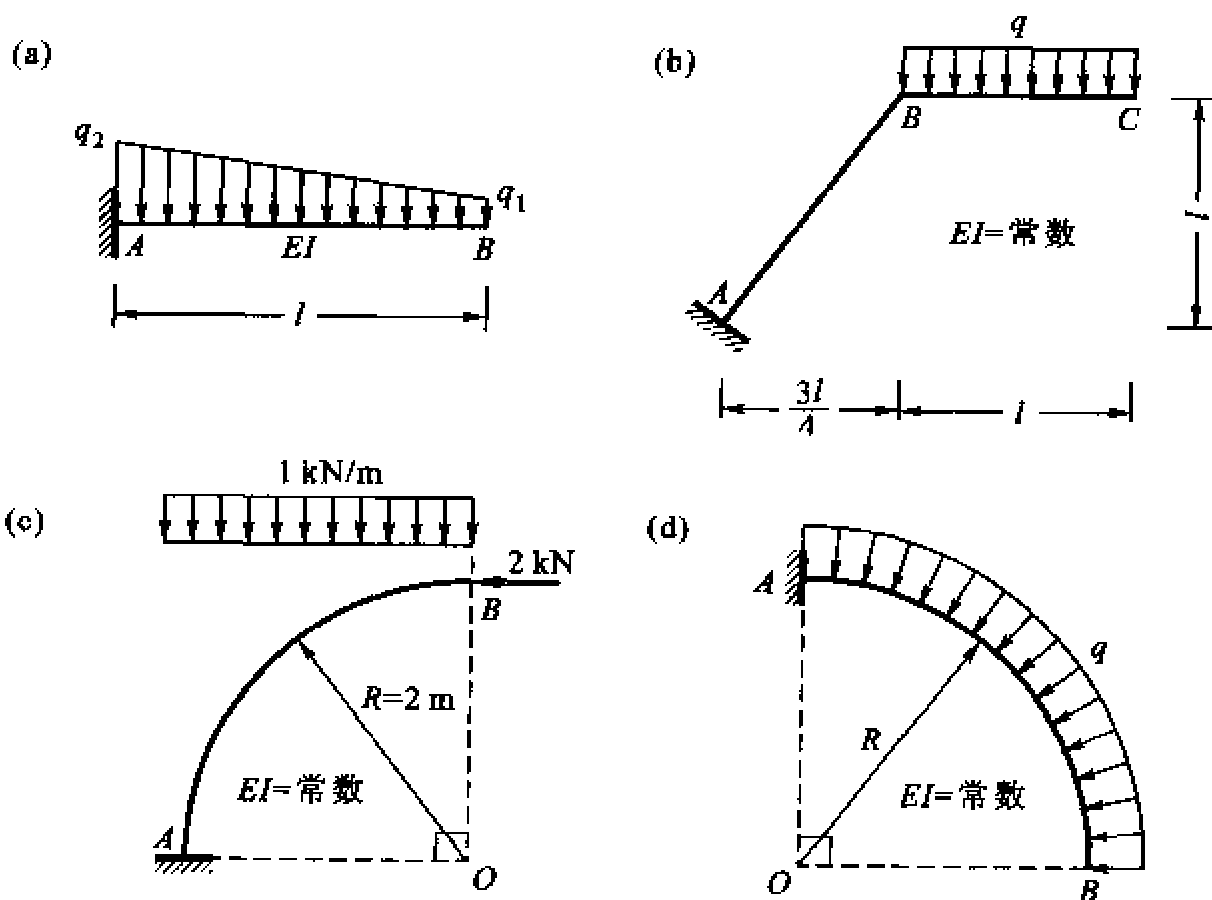
题5-4图

5-5　已知桁架各杆的 EA 相同，试求 AB、BC 两杆之间的相对转角 $\Delta_{\theta B}$。



题5-5图

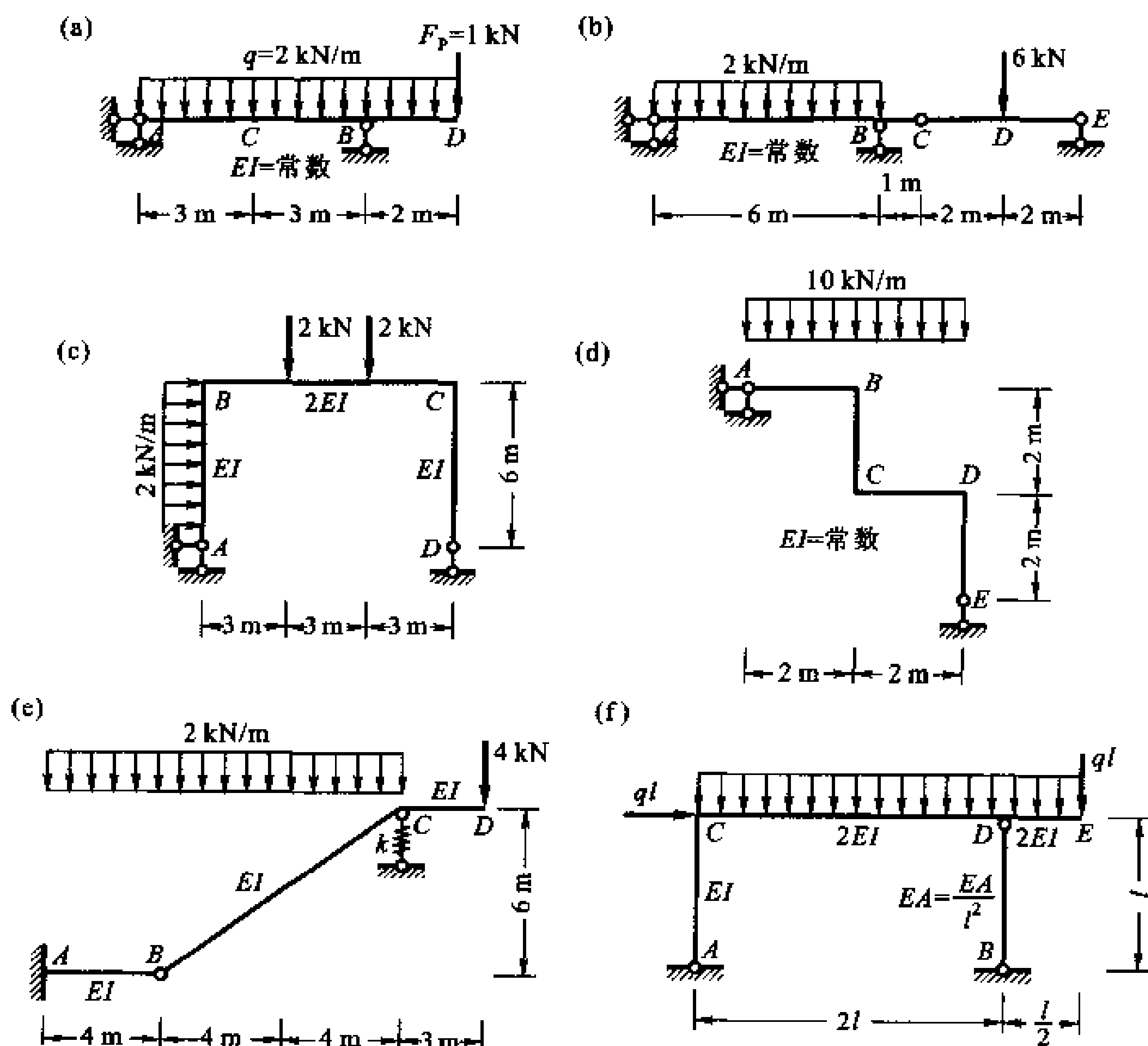
5-6　试用积分法计算图示结构的位移：(a) Δ_{yB}；(b) Δ_{yC}；(c) θ_B；(d) Δ_{xB}。



题5-6图

5-7　试用图乘法计算图示梁和刚架的位移：(a) Δ_{yC}；(b) Δ_{yD}；(c) Δ_{xC}；(d) Δ_{xE}；(e) θ_D；(f) Δ_{yF}。

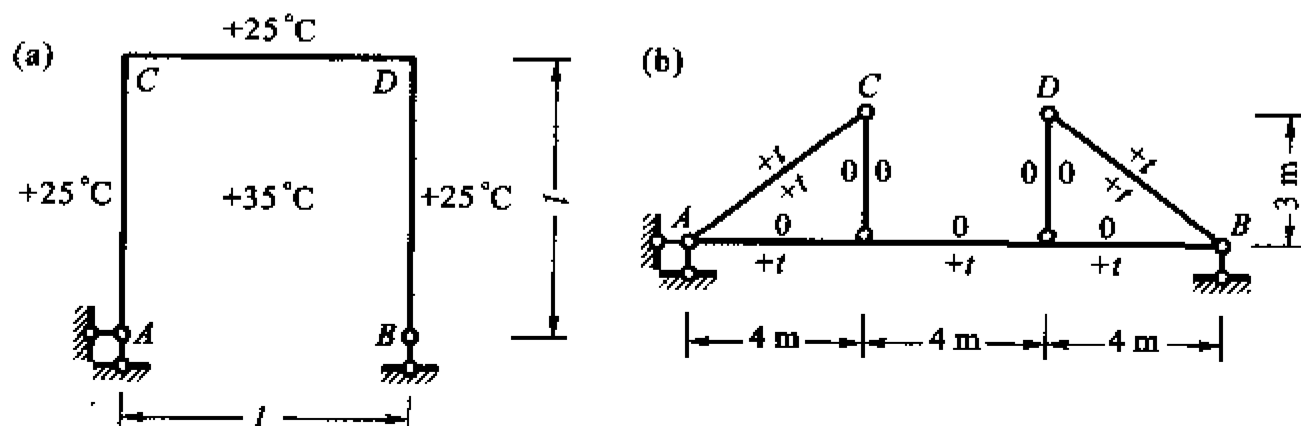
5-8　试说明温度变化、支座位移等非荷载因素的作用分别会使静定结构发生何种性质的变形或位移，这



题 5－7 图

种变形或位移与杆件截面的刚度有无关系。

5－9　图示结构材料的线膨胀系数为 α，各杆横截面均为矩形，截面高度为 h。试求结构在温度变化作用下的位移：(a) 设 $h=l/10$，求 Δ_{xB}；(b) 设 $h=0.5$ m，求 Δ_{CD}（C、D 点距离变化）。

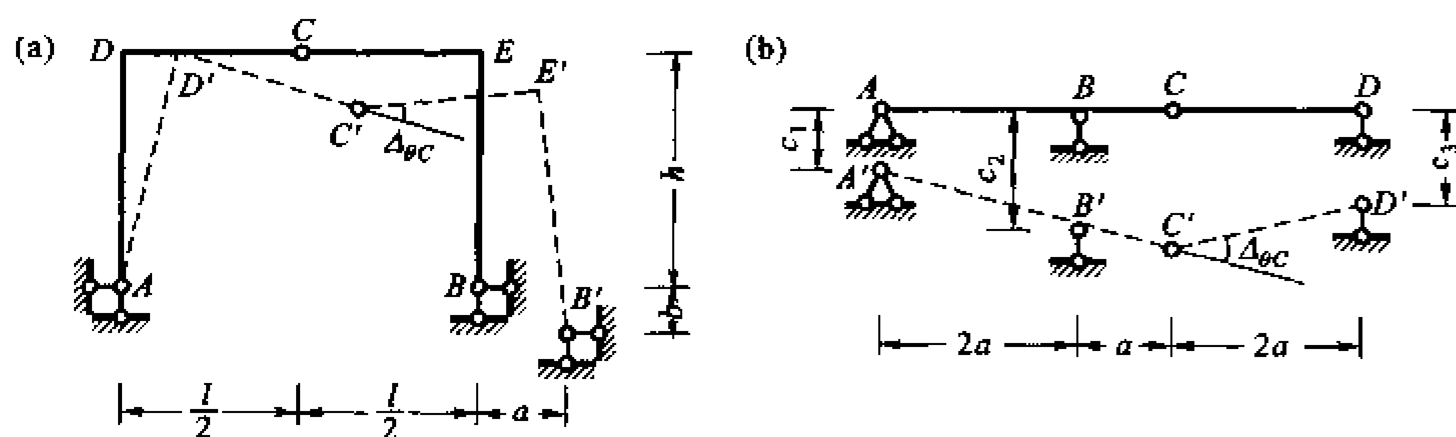


题 5－9 图

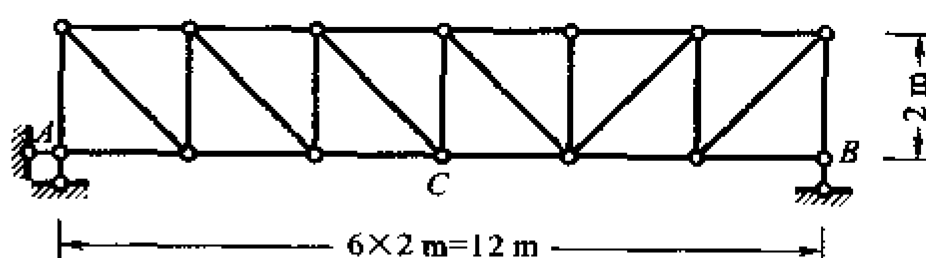
5－10　试求图示结构在支座位移作用下的位移：(a) $\Delta_{\varphi C}$；(b) Δ_{yC}，$\Delta_{\varphi C}$。

5－11　图示桁架如欲通过均匀改变上弦各杆的长度使跨中起拱 3 cm，试求每根上弦杆的长度应如何改变。

5－12　试求图示在水平面内刚架 C 点的竖向位移。已知 $\angle ABC=90°$，$q=2$ kN/m，$a=0.6$ m，$b=0.4$ m，

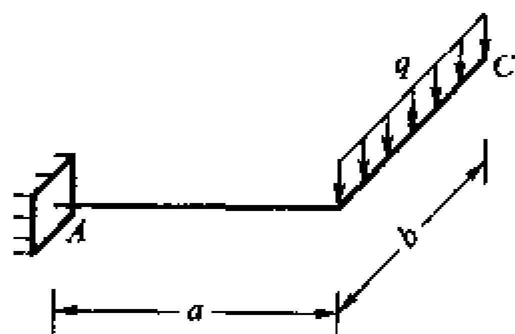


题 5-10 图



题 5-11 图

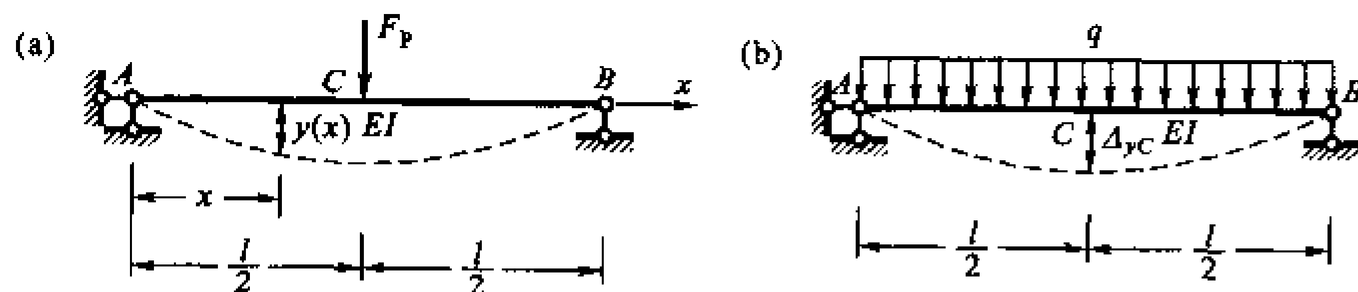
各杆均为直径 $d=3$ cm 的圆钢，$E=2.1\times10^5$ MPa，$G=0.8\times10^5$ MPa。



题 5-12 图

5-13 功的互等定理等有何适用范围？为什么？该定理是否适用于板壳或实体结构？

5-14 已知等截面简支梁在图 a 所示跨中集中荷载作用下的挠曲线方程为 $y(x)=\frac{F_P x}{48EI}(3l^2-4x^2)$，$\left(0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\right)$。试利用功的互等定理求其在图 b 所示均布荷载作用下的跨中挠度 Δ_{yC}。



题 5-14 图

第6章 力 法

§6-1 力法的基本概念

在前面几章中，已经详细地讨论了静定结构的受力分析问题。但在实际工程中应用更为广泛的是超静定结构，力法就是一种适用于超静定结构受力分析的基本方法。

在第2章中已经述及，超静定结构的几何构造特征是有多余约束存在，这就决定了超静定结构的基本静力特性：在外部作用下，超静定结构的反力和内力需同时运用静力平衡条件和变形协调条件才能求解，而满足上述两种条件的解答是惟一的。图6-1a所示的连续梁属于具有一个多余约束的超静定结构，其支座 A、B 和 C 处的三根竖向链杆中的任何一根都可以视为多余约束。在图示竖向荷载作用下，由平衡条件 $\sum F_x=0$，可知 A 支座的水平反力为零。但是，三个支座竖向反力却无法由 $\sum F_y=0$ 和 $\sum M=0$ 两个独立平衡条件惟一确定。只要任意设定其中一个竖向反力的数值，便可由上述平衡条件求出另外两个竖向反力。这说明满足上述平衡方程的竖向反力可以有无穷多组，所以需要解决的问题就是，如何从这无穷多组解答中找出真实解。

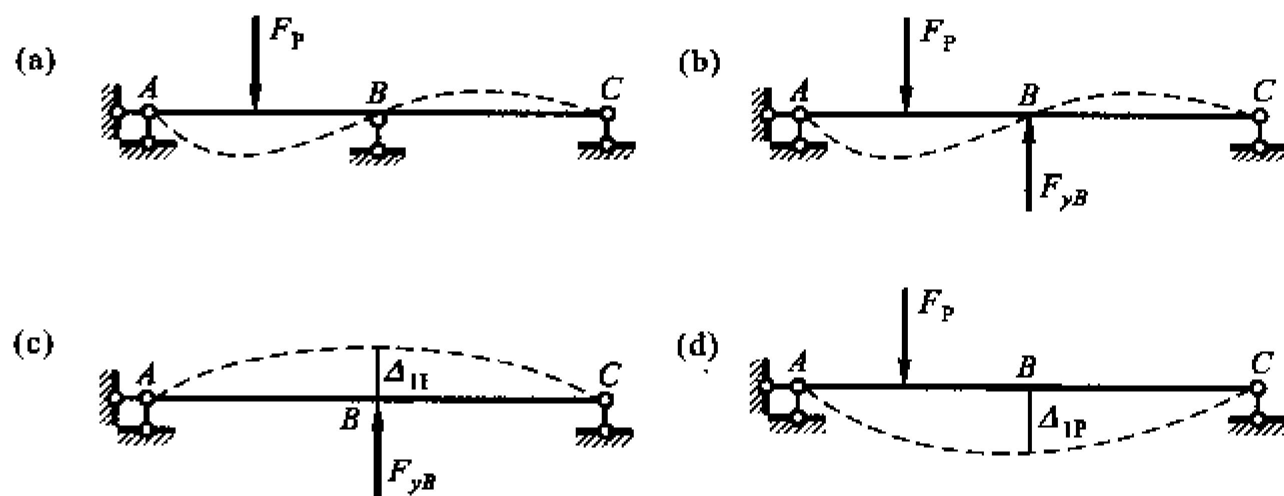


图 6-1

设想将支座 B 的竖向链杆撤除，代以原支座反力 F_{yB}，如图6-1b所示。此时，原超静定的连续梁便转化为静定的简支梁。如果图6-1b中的 F_{yB} 与原连续梁 B 支座的反力相等，则图6-1a、b所示梁的反力、内力和变形情况就应该完全相同。这样，就可以将原超静定结构的受力分析问题转化为相应静定结构的受力分析问题。因此，问题的关键在于如何确定真实的 F_{yB}。

根据线弹性体系的叠加原理，图6-1b所示的受力状态可以看作是外荷载 F_P 和未知力 F_{yB} 单独作用下效应的叠加。图6-1c和d分别对应 F_{yB} 和 F_P 单独作用时的情况，两种情况下 B 点的竖向位移分别记为 Δ_{11} 和 Δ_{1P}。Δ_{11} 可视作单位力作用于 B 点时引起的竖向位移 δ_{11} 与 F_{yB} 的乘积，即 $\Delta_{11}=\delta_{11}F_{yB}$。按照已知条件，原结构 B 点处是没有竖向位移的。这样，真实的 F_{yB} 应该满

足方程

$$\delta_{11}F_{yB}+\Delta_{1P}=0$$

式中 δ_{11} 和 Δ_{1P} 均为已知外力作用下的位移，可以按第5章中所述的单位荷载法求得。然后，就可以由上式确定 F_{yB} 的数值。将 F_{yB} 也视作一种荷载，对图6－1b所示的静定梁进行受力分析，就可以求得6－1a所示原超静定梁的全部反力、内力和变形。这就是用力法求解超静定结构的基本概念。

在力法中，一般将原超静定结构撤除多余约束后得到的静定结构称为力法基本结构。力法的基本特点是：以多余约束中的未知力(多余约束力)作为基本未知量，称为力法基本未知量，根据基本结构在外荷载和多余约束力共同作用下，在解除多余约束处的位移必须符合于原结构相应位移的条件列出方程，这种方程反映了变形协调条件，称为力法方程。由力法方程求出基本未知量，然后就可以按照静定结构受力分析的方法求解原超静定结构。

对于同一个问题来说，力法基本结构的选取可以有多种方式，但对于不同的基本结构来说，力法基本未知量的数目是相同的。对应于每一个多余约束力，都有一个相应的变形协调条件。例如，对于图6－1a所示的连续梁，也可以取图6－2a所示的基本结构，即在 B 支座处将铰插入杆件，以支座弯矩 M_B 作为力法基本未知量。图6－2b和c所示分别为 $M_B=1$ 和荷载单独作用时的情况，而变形协调条件是铰 B 两侧截面的相对转角应符合于原结构。因梁在 B 点原是连续的，所以上述截面的相对转角应等于零。于是，变形协调方程为

$$\delta_{11}M_B+\Delta_{1P}=0$$

按上式求得 M_B 后，即可按照图6－2a求得梁的全部反力和内力。

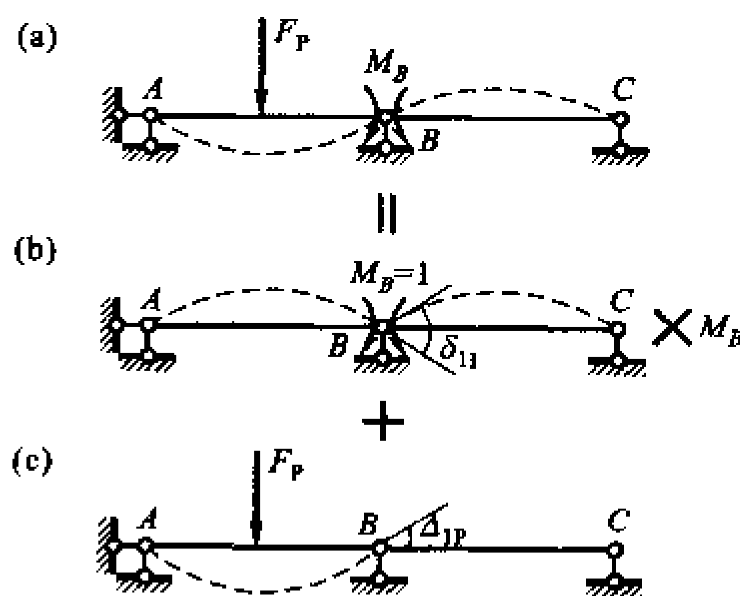


图 6－2

综上所述，求解超静定结构除了需运用静力平衡条件外，还必须计算结构的变形，运用变形协调条件。由此可推知，超静定结构的反力和内力一般与结构构件的刚度有关。用力法可以求解各种类型的超静定结构。力法的基本思路是：通过撤除多余约束，把多余约束力作为基本未知量，将超静定结构的受力分析转化为对相应的基本结构的受力分析。根据真实的多余约束力应使基本结构的位移与原结构一致的变形协调条件，全部多余约束力可以由数目相等的变形协调方程联立解得。然后，将求得的多余约束力作为一种荷载，与原有荷载一同作用于基本结构，运

用静力平衡条件完成受力分析，所得的反力和内力，就是原超静定结构的反力和内力。

§6－2　超静定次数与力法基本结构

超静定结构是有多余约束的几何不变体系。一个超静定结构有多少个多余约束，相应地便有多少个多余约束力，也就需要建立同样数目的变形协调方程，才能把多余约束力解算出来。因此，用力法计算超静定结构时，首先必须确定多余约束的数目，这一数目就称为结构的超静定次数。

超静定结构可以看作是在静定结构的基础上增加若干多余约束而构成。因此，确定超静定次数最直接的方法就是在原结构上撤除多余约束，使之变成一个静定的结构，作为力法基本结构，而所去除多余约束的数目，就是原结构的超静定次数。

从超静定结构上去除多余约束的方法很多，归纳起来主要有以下几种：

1．撤除支座处的一根支杆或切断一根链杆，相当于去除一个约束。

例如，图 6－3a 所示为一超静定桁架，撤除 B 支座支杆并切断四根链杆后可以得到图 6－3b[①] 所示静定的基本结构。所以该桁架是五次超静定的。

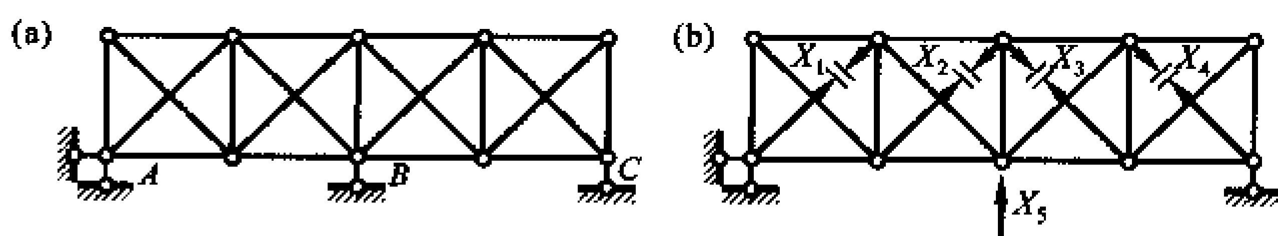


图　6－3

2．撤除一个铰支座或撤除一个单铰，相当于撤除两个约束。

例如，将图 6－4a 所示刚架横梁上的铰联结撤除，可以得到静定的基本结构如图 6－4b，所以该刚架是两次超静定的。

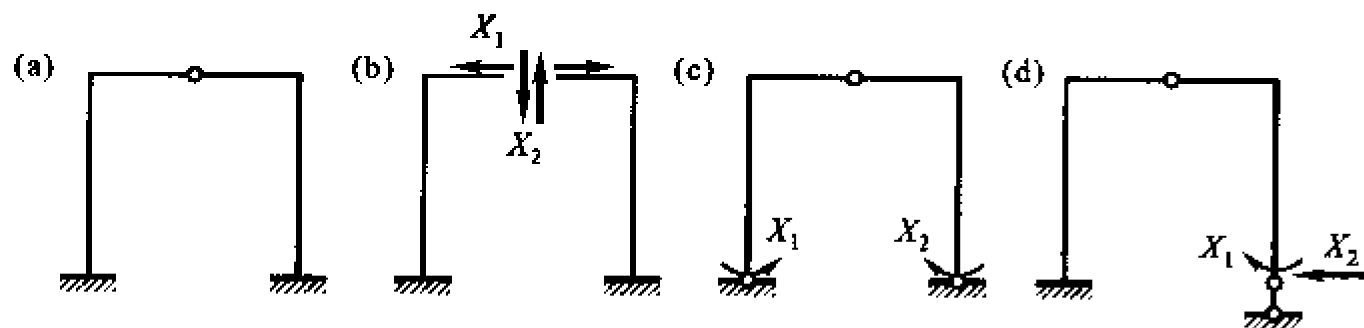


图　6－4

3．撤除一个固定支座或切断一根刚架杆件，相当于撤除三个约束。

例如，图 6－5a 所示刚架的两根横梁切断后，即得到静定的基本结构如图 6－5b，所以该刚架是六次超静定的。

① 由于多余约束力有时是未知的广义多余约束力，为叙述的统一和完整，所以本书仍沿用以往教材中使用的 X_i 表示。

4. 将固定支座改为铰支座或滑动支座，或者在刚架杆件上插入一个铰，或是将铰支座或滑动支座改为单支杆支座，均相当于撤除一个约束。

例如，将图6－4a所示刚架的支座均改为铰支座，即可得到图6－4c的基本结构；或者仅将其右边支座改为单支杆支座，得到图6－4d的基本结构。

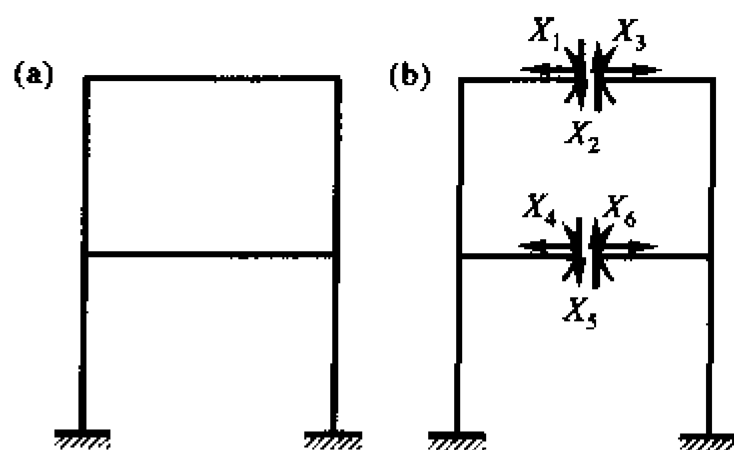


图 6－5

在运用上述方法撤除多余约束时应该注意：既需要将全部多余约束撤除，又不能误除必要约束，使原结构成为几何可变体系。例如，图6－3所示桁架，在撤除多余约束时不能将位于一个结间内的两根腹杆同时保留，这样该结间将成为内部超静定的；在撤除 B 支座支杆后，也不能将一个结间内的两根腹杆同时撤除，这样会得到一个几何可变体系。

例6－1 试确定图6－6a所示组合梁的超静定次数，并画出力法基本结构。

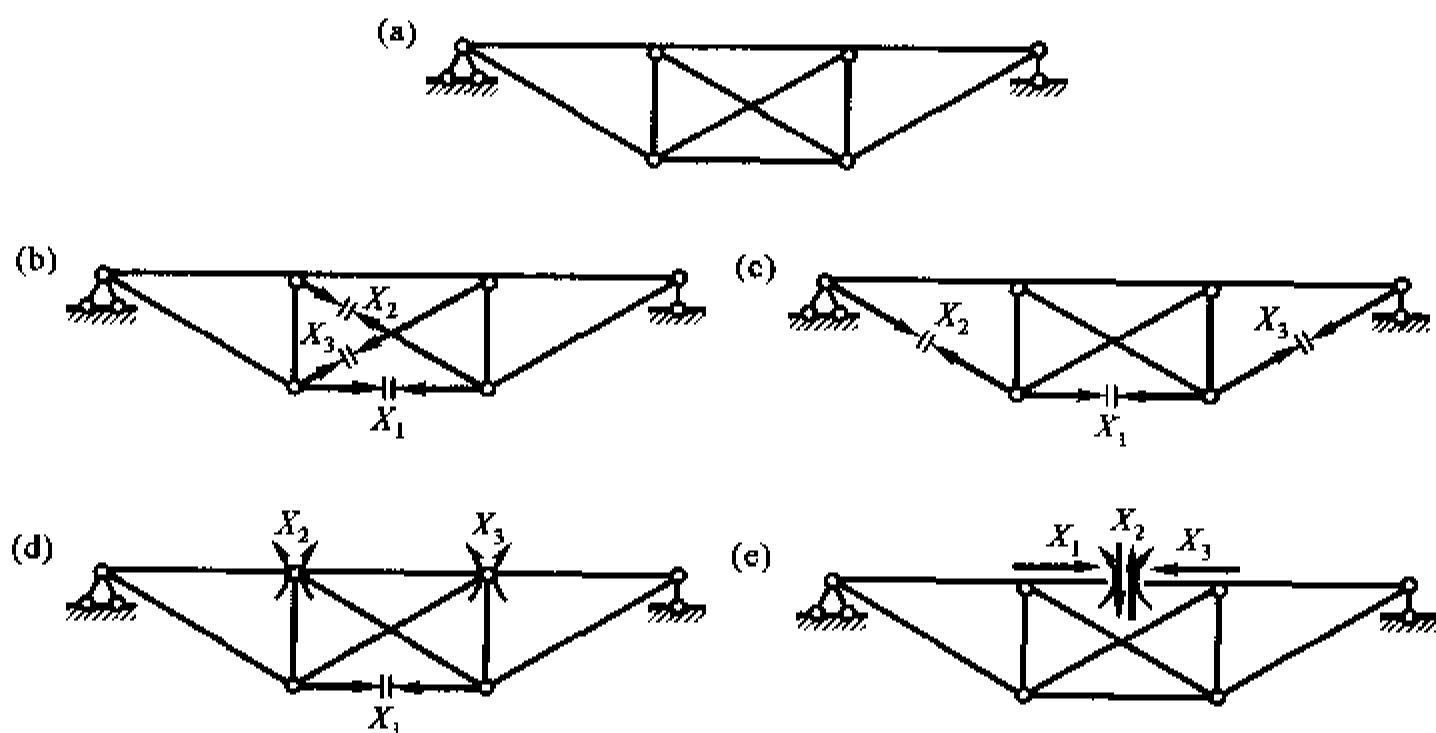


图 6－6

解 该组合梁与基础之间是简支的，即支座反力是静定的，但体系内部却是超静定的。图6－6b、c分别表示以不同的方式切断组合梁的三根链杆后所得到的基本结构。可见，该组合梁是三次超静定的。图6－6d是通过将两个铰插入受弯杆件，使半铰变为全铰，再切断一根链杆得到的基本结构。图6－6e是通过切断受弯杆件撤除三个多余约束得到的基本结构。

例6－2 试确定图6－7a所示刚架的超静定次数。

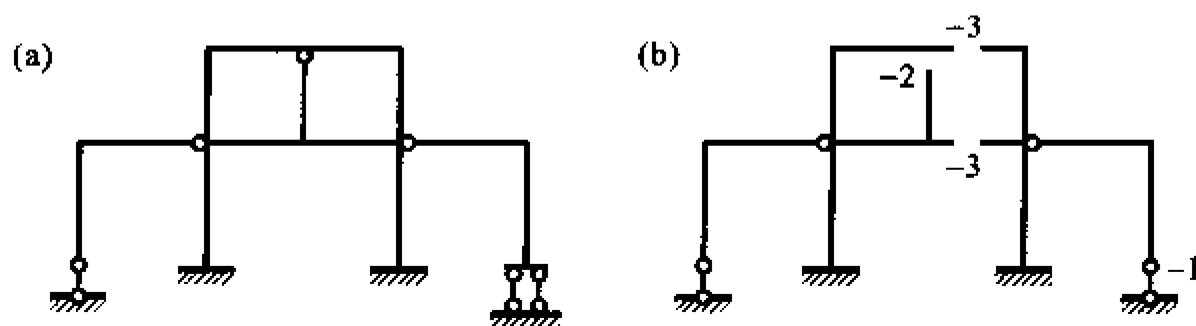


图 6-7

解 先将中间主跨与基础看成一个整体,左边跨与该整体通过一个铰和一根不通过该铰的链杆联结,构成几何不变,且无多余约束的静定部分。当有荷载作用于左边跨时,该部分的反力和内力均可利用平衡条件确定;当荷载作用于其余部分时,左边跨的反力和内力均为零。右边跨与该整体通过一个铰和一个滑动支座联结,有一个多余约束。因此,可以将滑动支座改为单支杆支座(图 6-7b),相当于撤除一个约束。

然后,分析主跨部分。若将上、下两根横梁切断,相当于共撤除六个约束;再解除中间竖杆与横梁之间的铰连结,相当于撤除两个约束。这样,原结构就成为图 6-7b 所示没有多余约束的几何不变体系。

根据以上分析可知,该刚架是九次超静定结构。

§6-3 力法原理与力法方程

如前所述,用力法分析超静定结构,是以多余约束力为基本未知量,再根据变形协调条件来求解多余约束力。然后,将多余约束力与原荷载一起作用于基本结构,按照静力平衡条件求解结构的反力和内力。由此可见,用力法计算超静定结构的关键在于建立变形协调方程,并由此解得多余约束力。这种变形协调方程就称为力法方程。以下举例说明力法原理与力法方程的建立。

图 6-8a 所示为一个二次超静定刚架,在图示荷载作用下的结构变形如虚线所示。若将固定支座 C 处的三个约束看作多余约束而撤除,并以未知力 X_1、X_2 和 X_3 代替原约束的作用,可得如图 6-8b 所示的基本结构。X_1、X_2 和 X_3 便称为力法的基本未知量,它们的方向可先任意假定。如果 X_1、X_2 和 X_3 与原结构 C 支座反力的大小与方向完全符合,则基本结构的全部反力、内力和变形将与原结构完全一致。

原结构 C 点处为固定支座,不可能产生任何位移。因此,基本结构在原荷载和全部多余约束力的作用下,也必须符合这样的变形条件,即在 C 点沿多余约束力 X_1、X_2 和 X_3 方向的位移 Δ_1、Δ_2 和 Δ_3 应都等于零。

一般地说,基本结构的上述每一项位移并非仅由该位移方向上的多余约束力所引起,而是由荷载以及各多余约束力共同作用引起的。这些因素单独作用时所引起的各项位移如图 6-8c、d、e、f 所示。现将 $X_1=1$、$X_2=1$ 和 $X_3=1$ 分别作用于基本结构时,C 点沿 X_1 方向的位移分别记为 δ_{11}、δ_{12} 和 δ_{13},沿 X_2 方向的位移分别记为 δ_{21}、δ_{22} 和 δ_{23},沿 X_3 方向的位移分别记为 δ_{31}、δ_{32} 和 δ_{33},将荷载作用于基本结构时的上述位移记为 Δ_{1P}、Δ_{2P} 和 Δ_{3P},根据叠加原理,基本结构应满足的变形协调条件可表达为

图 6-8

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta_1 &= \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0\\
\Delta_2 &= \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0\\
\Delta_3 &= \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0
\end{aligned}\right\}
$$

这就是为求解多余约束力 X_1、X_2和 X_3所需建立的力法方程组。这组方程的物理意义是:在基本结构中,由于全部多余约束力和已知荷载的作用,在去除多余联系处的位移应等于原结构的相应位移。

对于 n 次超静定结构就有 n 个多余约束,而每一个多余约束都对应一个未知约束力,同时又提供了一个变形条件,相应地就可以建立 n 个变形协调方程,从中就可解出 n 个未知约束力。这 n 个方程可写为

$$
\left.\begin{aligned}
\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= \Delta_1\\
\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \cdots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= \Delta_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= \Delta_n
\end{aligned}\right\} \tag{6-1a}
$$

当原结构在解除多余约束处的位移为零时,则有

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\cdots+\delta_{1n}X_n+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\cdots+\delta_{2n}X_n+\Delta_{2P}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_{n1}X_1+\delta_{n2}X_2+\cdots+\delta_{nn}X_n+\Delta_{nP}=0\end{aligned}\right\}\tag{6-1b}$$

式(6－1)就是在荷载作用下 n 次超静定结构力法方程的一般形式。无论结构是什么形式，基本结构如何选取，其力法方程的形式是不变的，故式(6－1)常称为力法典型方程。力法方程的实质是一组变形协调方程。

在力法典型方程中，δ_{ij} 是由单位力 $X_j=1$ 引起的沿 X_i 方向的位移，常称为柔度系数；Δ_{iP} 是由荷载引起的沿 X_i 方向的位移，称为自由项；而 Δ_i 则为原结构的相应位移。当这些位移与所设基本未知量的方向一致时为正，反之则为负。以上符号中的第一个下标表示与多余未知力序号相应的位移序号，第二个下标则表示产生该项位移的原因。这些位移均可以按照第 5 章静定结构位移计算的方法求得。位于力法方程左上方 δ_{11} 至右下方 δ_{nn} 的一条主对角线上的系数 δ_{ii} 称为主系数，主对角线两侧的其他系数 $\delta_{ij}(i\neq j)$ 则称为副系数。主系数 δ_{ii} 代表单位力 $X_i=1$ 的作用在 X_i 自身方向上所引起的位移，它必定与该单位力的方向一致，故主系数 δ_{ii} 是恒正的。而副系数 $\delta_{ij}(i\neq j)$ 代表单位力 $X_j=1$ 所引起的 X_i 方向的位移，它可能与所设定的 X_i 同向、反向或为零，所以副系数 $\delta_{ij}(i\neq j)$ 可能为正、为负或为零。根据位移互等定理，有

$$\delta_{ij}=\delta_{ji}\tag{6-2}$$

式(6－1)的力法典型方程也可写成如下的矩阵形式：

$$\boldsymbol{\delta X}+\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{P}}=\boldsymbol{\Delta}\tag{6-3a}$$

和

$$\boldsymbol{\delta X}+\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{P}}=\mathbf{0}\tag{6-3b}$$

式中 $\boldsymbol{\delta}$ 称为柔度矩阵，其矩阵元素由式(6－1)中的全部柔度系数 δ_{ij} 构成。由式(6－2)可知，$\boldsymbol{\delta}$ 为对称矩阵；$\boldsymbol{X}$ 为基本未知力向量；$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{P}}$ 为荷载引起的位移向量。

力法方程是一个线性代数方程组，求解这一个方程组可以得到全部基本未知量，亦即求得了全部多余约束力。此时，结构的内力一般可以根据平衡条件直接求算，也可依据叠加原理用下式计算：

$$\left.\begin{aligned}M&=\overline{M}_1X_1+\overline{M}_2X_2+\cdots+\overline{M}_nX_n+M_{\mathrm{P}}\\ F_{\mathrm{Q}}&=\overline{F}_{\mathrm{Q1}}X_1+\overline{F}_{\mathrm{Q2}}X_2+\cdots+\overline{F}_{\mathrm{Q}n}X_n+F_{\mathrm{QP}}\\ F_{\mathrm{N}}&=\overline{F}_{\mathrm{N1}}X_1+\overline{F}_{\mathrm{N2}}X_2+\cdots+\overline{F}_{\mathrm{N}n}X_n+F_{\mathrm{NP}}\end{aligned}\right\}\tag{6-4}$$

式中 $\overline{M}_i$、$\overline{F}_{\mathrm{Q}i}$ 和 $\overline{F}_{\mathrm{N}i}$ 是基本结构由于 $X_i=1$ 单独作用而产生的内力，M_{P}、F_{QP} 和 F_{NP} 是基本结构由于荷载作用而产生的内力。

§6－4　力法解超静定结构

根据力法的基本原理，超静定结构的受力分析可按以下步骤进行：

(1) 确定结构的超静定次数，选取合理的基本结构，并将荷载和作为力法基本未知量的多余

约束力作用于基本结构。

(2) 建立力法方程，求出各柔度系数 δ_{ij} 和自由项 Δ_{iP}。此时，需要分别作出各单位未知力以及荷载单独作用于基本结构时的单位内力图和荷载内力图(或写出内力表达式)，再按照静定结构位移计算的方法求出系数和自由项。

(3) 求解力法方程，得基本未知量，即多余约束力。

(4) 作出外荷载和多余约束力共同作用下基本结构的内力图。这实际上就是原结构的内力图，或者利用式(6-4)依据叠加法求得内力图。

基本结构的选取不同时，超静定结构的求解步骤和最终结果虽然相同，但计算工作量有时差异很大。因此，基本结构的合理选取在力法中常具有重要意义。合理选取基本结构总的原则是使计算简单。例如，对于梁和刚架结构来说，应该使单位弯矩图和荷载弯矩图的图形比较简单，甚至仅发生于局部，以便于图乘法的运用，或是使方程的某些副系数或自由项等于零；若是对称结构，一般宜取对称的基本结构；对于有弹性支座的情况，去除多余约束时通常可将弹性支座切断，运算较为简单。

6-4-1　超静定梁和刚架

对于一般的刚架杆件来说，轴力和剪力对变形的影响比弯矩要小得多。因此，在计算超静定梁和刚架时，通常可忽略轴向变形和剪切变形的影响。

例6-3　试计算图6-9a所示连续梁，并绘制弯矩图。

解　该连续梁是两次超静定的，若在支座 B、C 处将铰插入梁内，则可得到由分段简支梁构成的基本结构，如图6-9b所示。此时，力法基本未知量就是 B、C 处的支座弯矩 X_1 和 X_2，对应的广义位移是 B、C 铰两侧截面的相对转角。原结构杆件在 B、C 处是连续的，上述相对转角应等于零，于是，可建立力法方程

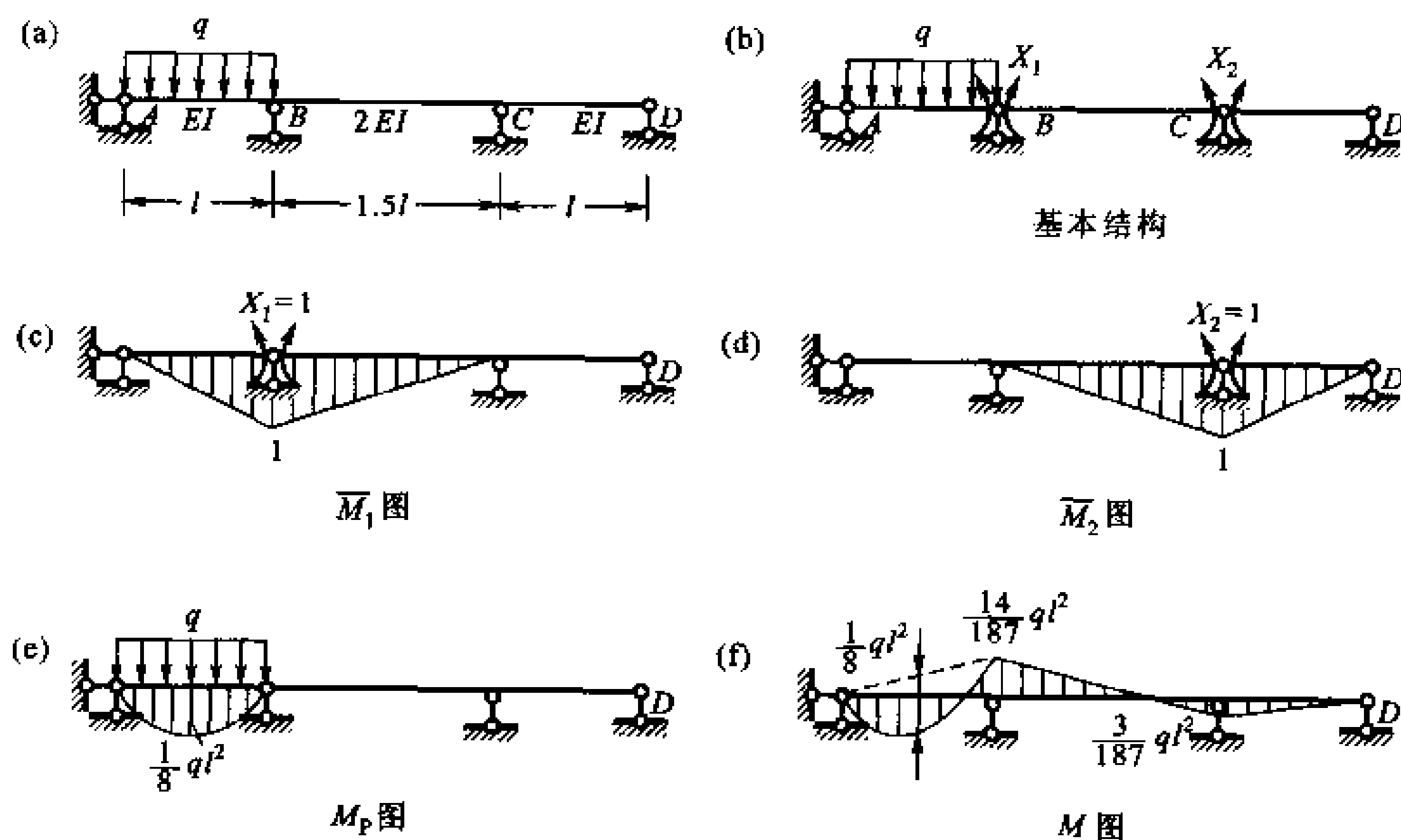


图　6-9

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0$$

绘出基本结构的单位弯矩图和荷载弯矩图，如图 6－9c、d 和 e 所示。用图乘法求得各系数和自由项如下：

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\frac{7l}{12EI},\quad \delta_{12}=\delta_{21}=\frac{l}{8EI}$$
$$\Delta_{1P}=\frac{ql^3}{24EI},\quad \Delta_{2P}=0$$

代入力法方程有

$$\left.\begin{aligned}\frac{7l}{12EI}X_1+\frac{l}{8EI}X_2+\frac{ql^3}{24EI}=0\\ \frac{l}{8EI}X_1+\frac{7l}{12EI}X_2=0\end{aligned}\right\}$$

解得

$$X_1=-\frac{14}{187}ql^2,\quad X_2=\frac{3}{187}ql^2$$

负号表示 X_1 的方向与原设定方向相反，梁在 B 截面处承受负弯矩，即截面上边纤维受拉。

根据以上求得的梁的支座弯矩，在 AB 段叠加均布荷载引起的简支梁弯矩图，便可得到该连续梁的弯矩图，如图 6－9f 所示。

现结合例 6－3 对基本结构的合理选取和结构刚度对其受力状态的影响进行分析。

首先讨论基本结构的选取问题。若采用图 6－10a 所示的基本结构，单位弯矩图和荷载弯矩图将分别如图 6－10b、c 和 d 所示，都是布满梁的全长，图形也比较复杂，此时各系数和自由项的计算要比例 6－3 中费时得多。当连续梁的跨数更多时，采用将铰插入梁内的基本结构优点就更为突出，此时不少副系数和自由项会等于零。

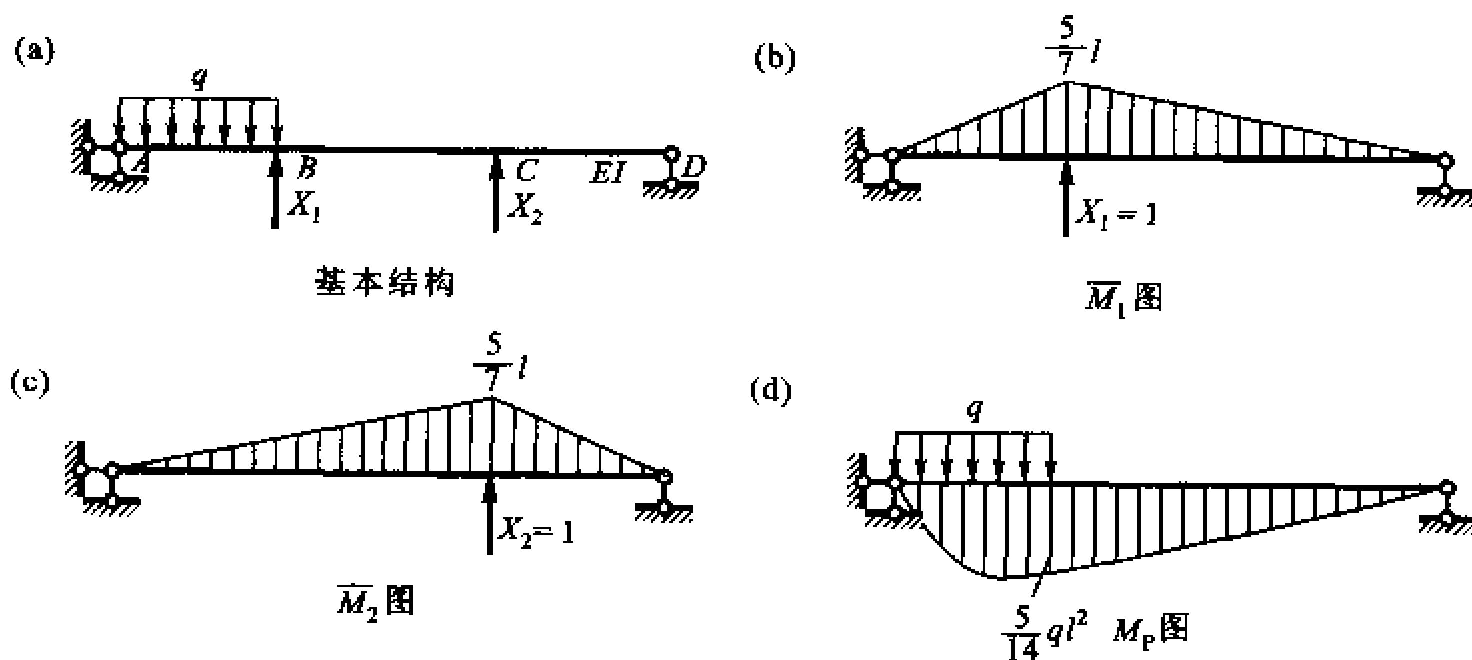


图　6－10

再分析一下结构的刚度对其受力状态的影响。由例 6－3 的计算结果可以看出，单位力以及荷载引起的位移均与杆件截面的弯曲刚度成反比，由此可以推论，结构的位移与结构的刚度成反比。但观察例 6－3 的力法方程和最终求得的多余约束力 X_1 和 X_2 可以发现，EI 本身并未出现在未知力表达式中，这说明在荷载作用下超静定结构的内力仅取决于杆件的相对刚度，而与杆件的绝对刚度无关。

例 6－4　试计算图 6－11a 所示刚架，并绘制内力图。设各杆 EI 相同。

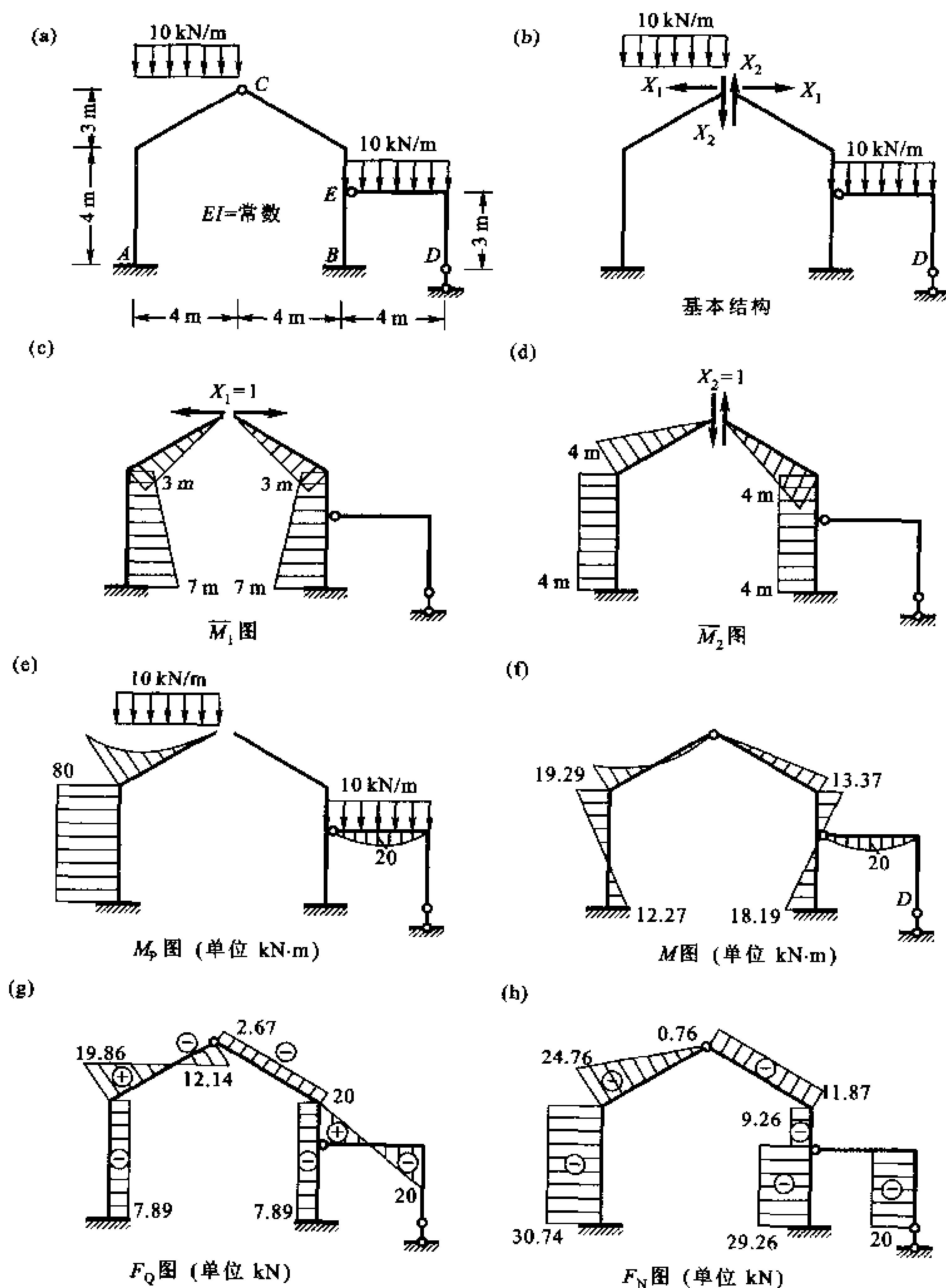


图　6－11

解　该刚架是两次超静定的，右边是一个静定的附属部分，无多余约束存在，可取图 6－11b 所示的基本结构，将原存在于铰 C 的约束力作为力法基本未知量。根据原结构在铰 C 两侧截面无相对线位移的变形条件，可

建立力法方程

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0$$

绘出基本结构的单位弯矩图和荷载弯矩图，分别如图 6－11c、d 和 e 所示。用图乘法可求得各系数和自由项如下：

$$\delta_{11}=\frac{722}{3EI}\ \mathrm{m^3},\quad \delta_{22}=\frac{544}{3EI}\ \mathrm{m^3},\quad \delta_{12}=\delta_{21}=0$$
$$\Delta_{1P}=-\frac{1\ 900}{EI}\ \mathrm{kN\cdot m^3},\quad \Delta_{2P}=\frac{1\ 680}{EI}\ \mathrm{kN\cdot m^3}$$

代入力法方程并消去$\frac{1}{EI}$ m³后，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{722}{3}X_1-1\ 900\ \mathrm{kN}=0\\ \frac{544}{3}X_2+1\ 680\ \mathrm{kN}=0\end{aligned}\right\}$$

解得

$$X_1=7.89\ \mathrm{kN},\quad X_2=-9.26\ \mathrm{kN}$$

刚架多余约束力求得后，就可按式(6－4)的叠加法绘制出刚架的弯矩图、剪力图和轴力图，分别如图 6－11f、g 和 h 所示。因刚架右边跨为静定部分，它的反力和内力与多余约束力的数值无关。

通过例 6－4 的分析应了解以下的基本概念：

如果超静定结构局部带有静定的附属部分，则该部分的反力和内力均可直接按照平衡条件求得，而与结构的变形以及未知约束力的数值无关。作用于超静定部分的荷载不会使静定的附属部分产生反力和内力；而作用于附属部分的荷载要使超静定部分发生反力和内力。例 6－4 中因铰 E 处仅存在竖向剪力，忽略杆件轴向变形的影响时，右边跨对超静定部分的影响仅表现在 BE 段的轴向力数值。

另外，在例 6－4 中，柔度系数 $\delta_{12}=\delta_{21}=0$，这就使得力法方程变成两个相互独立的方程，无需联立便可求解。这种情况称为弹性解耦，它是得益于单位弯矩图 $\bar{M}_1$ 和 $\bar{M}_2$ 分别为对称和反对称的。弹性解耦的物理含义是：作用于基本结构的水平多余约束力 X_1 不会使杆端切口处发生竖向的相对位移；反过来，竖向的多余约束力 X_2 也不会使杆端切口处发生水平的相对位移。由此可见，求解对称的超静定结构时，采用对称的基本结构常可使计算得以简化。

6－4－2　超静定桁架

对于理想桁架，杆件只受轴向力的作用。在计算桁架的位移时，只需考虑杆件轴向变形的影响。

例 6－5　试计算图 6－12a 所示超静定桁架的内力。设各杆 EA 相同，桁架 C 结点处设有水平方向的弹性支座，其刚度系数 $k=\frac{EA}{4}\ \mathrm{m^{-1}}$。

解　该桁架可以看作是体系内部和支座各有一个多余约束，因此为两次超静定的。选取基本结构时可以切断一根斜杆和弹性支座，如图 6－12b 所示。根据截口处构件的相对位移等于零的变形协调条件，可建立力法方程

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0$$

$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0$$

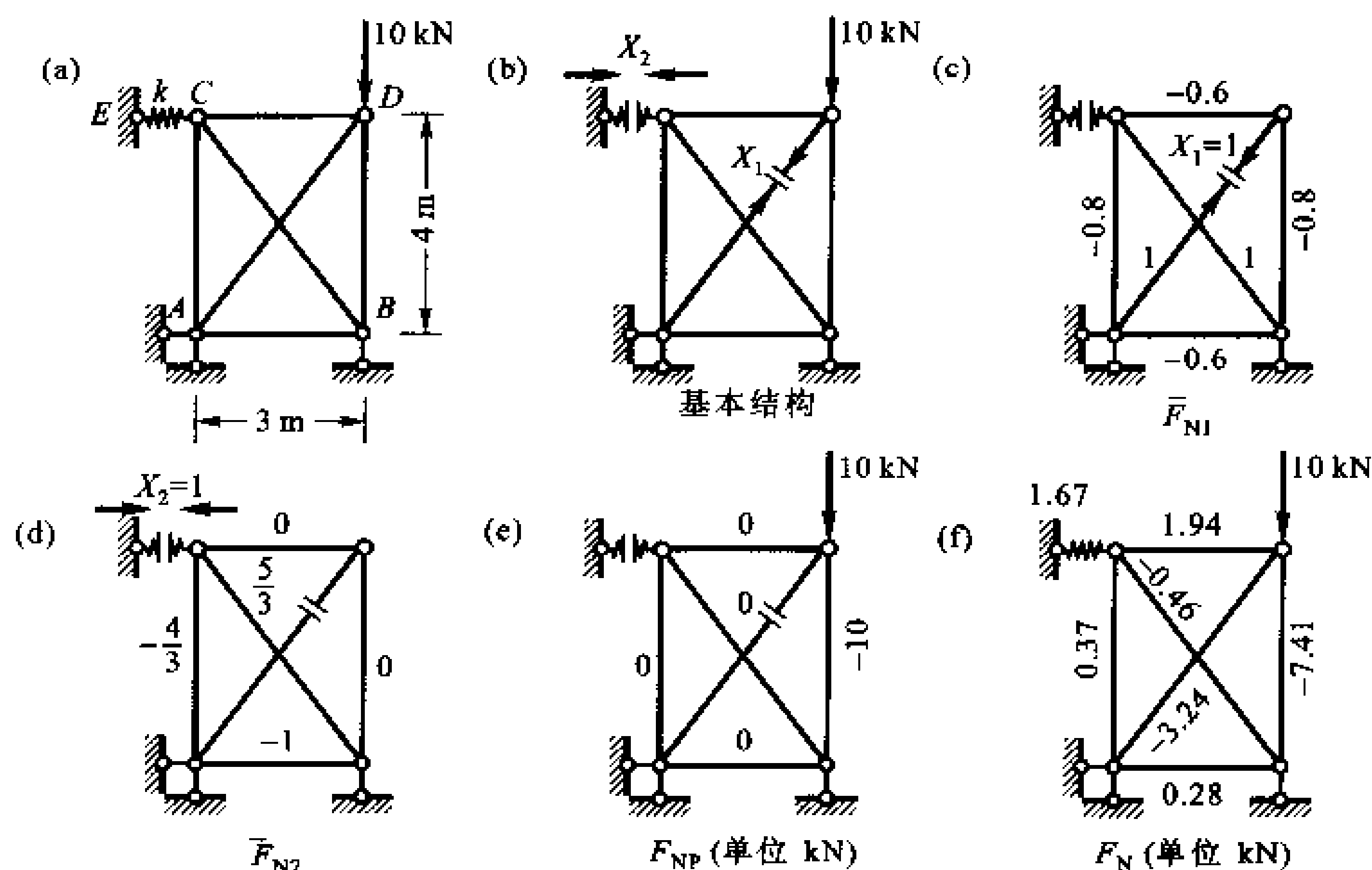


图 6-12

求出基本结构的单位轴力和荷载轴力，分别如图 6-12c、d 和 e 所示。力法方程系数和自由项的计算公式为

$$\delta_{ij}=\sum\frac{\bar{F}_{Ni}\bar{F}_{Nj}}{EA}l,\quad \Delta_{iP}=\sum\frac{\bar{F}_{Ni}F_{P}}{EA}l$$

据此可列表进行计算，如表 6-1 所示。应当注意的是，以上位移项的计算中应包括被切断杆 *AD* 杆和弹簧 *CE* 本身变形的影响。于是，有

表 6-1 δ_{ij}、Δ_{iP}和桁架内力 F_N的计算

杆件	杆长 /m	$\bar{F}_{N1}$	$\bar{F}_{N2}$	F_{NP} /kN	$\bar{F}_{N1}^2 l$ /m	$\bar{F}_{N2}^2 l$ /m	$\bar{F}_{N1}\bar{F}_{N2} l$ /m	$\bar{F}_{N1}F_P l$ /(kN·m)	$\bar{F}_{N2}F_P l$ /(kN·m)	$F_N=\sum\bar{F}_{Ni}X_i+F_{NP}$ /kN
AB	3	-0.6	-1	0	1.08	3	1.8	0	0	0.28
CD	3	-0.6	0	0	1.08	0	0	0	0	1.94
AC	4	-0.8	$-\frac{4}{3}$	0	2.56	7.11	4.26	0	0	0.37
BD	4	-0.8	0	-10	2.56	0	0	32	0	-7.41
AD	5	1	0	0	5	0	0	0	0	-3.24
BC	5	1	$\frac{5}{3}$	0	5	13.89	8.33	0	0	-0.46
弹簧		0	1	0	0	4	0	0	0	1.67
$\sum$					17.28	28	14.39	32	0	

$$EA\delta_{11}=17.28\ \text{m},\quad EA\delta_{22}=28\ \text{m},\quad EA\delta_{12}=14.39\ \text{m}$$

$$EA\Delta_{1P}=32\ \text{kN·m}\quad ,EA\Delta_{2P}=0$$

将系数和自由项代入力法方程并消去$\frac{1}{EA}$ m得

$$\left.\begin{aligned}17.28X_1+14.39X_2+32\ \text{kN}=0\\14.39X_1+28X_2=0\end{aligned}\right\}$$

解得

$$X_1=-3.24\ \text{kN},\quad X_2=1.67\ \text{kN}$$

桁架杆件轴力 F_N的计算结果可见表 6－1，如图 6－12f 所示。

以下就例 6－5 涉及的一些基本概念进行讨论。

首先应该明确，弹簧或弹性支座在体系的几何构造分析和结构超静定次数的判定中均应作为约束看待。

另外，值得讨论的是，若取图 6－13 所示的各种基本结构情况如何。先讨论在选取基本结构时是否可如图 6－13a 所示，将 AD 杆和弹性支座直接去除呢？要回答这一问题，必须深入理解力法方程的物理含义。若取图 6－13a 作为基本结构，多余约束力 X_1和 X_2所对应的广义位移应该是 A、D 两点之间的相对线位移Δ_1和 C 点的水平位移Δ_2。原结构在荷载作用下的这两项位移都不为零，因此力法方程中基本结构的相应位移也不应为零。实际上，Δ_1就等于 AD 杆的长度变化，按照材料力学并考虑到 AD 杆所受的轴力与 X_1方向相反，有 $\Delta_1=-\frac{l}{EA}X_1$；同理，$\Delta_2$应等于弹簧的伸缩量，有 $\Delta_2=-\delta X_2=-\frac{X_2}{k}$，$\delta$ 称为弹簧的柔度系数，等于弹簧刚度系数的倒数。于是，力法方程可写为

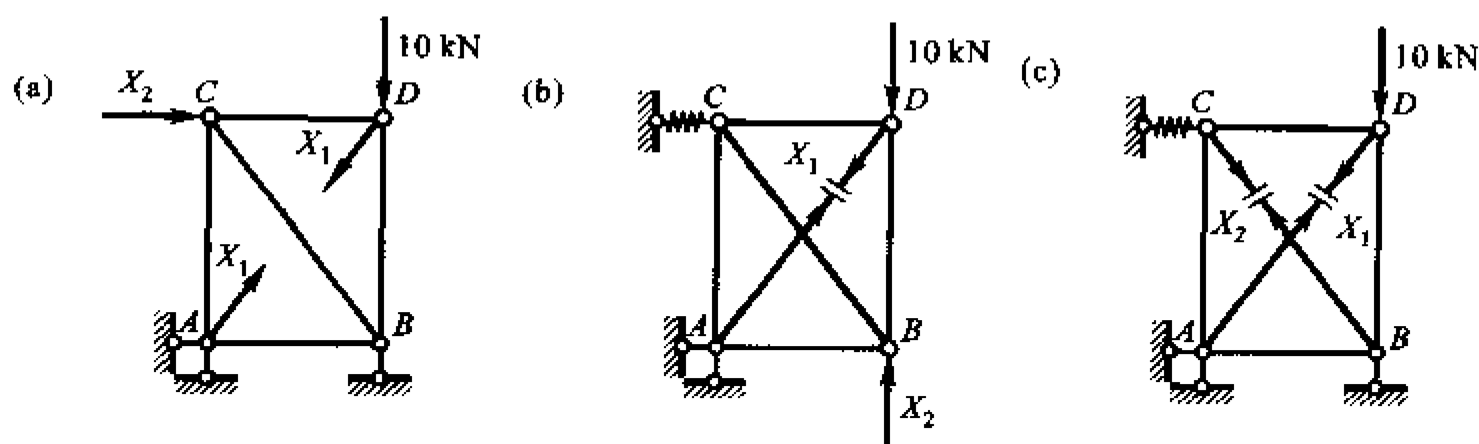


图　6－13

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=-\frac{l}{EA}X_1$$

$$\delta_{12}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=-\frac{X_2}{k}$$

此时方程的系数和自由项均应按照 6－13a 的基本结构计算，即 δ_{11}和 δ_{22}中不再包含 AD 杆和弹簧的自身变形。解上述力法方程可以得到与例 6－5 中完全相同的多余约束力。

当结构有弹性支座，在选取力法基本结构时一般将弹性支座切断计算比较方便，此时只需在

受弯杆 AB：　$EI=1.40\times10^4\ \text{kN}\cdot\text{m}^2$，　$EA=2.12\times10^6\ \text{kN}$

二力杆 AD、BD：$EA=2.58\times10^5\ \text{kN}$，　二力杆 CD：$EA=2.27\times10^5\ \text{kN}$

解　此加劲梁是一次超静定结构。现取图 6-15b 所示的基本结构，根据竖杆切口处截面相对位移为零的条件可建立力法方程

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

单位未知力和荷载分别作用时，基本结构的弯矩和轴力分别如图 6-15c 和 d 所示。

由图 6-15d 可知，当荷载作用于基本结构时所有杆件的轴力均为零，由此可知 Δ_{1P}中应不含有杆件轴向变形的影响。在计算力法方程的系数项时，现先将受弯杆件轴向变形的影响也计入在内，于是，有

$$\delta_{11}=\sum\frac{\overline{F}_{N1}^2 l}{EA}+\sum\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}dx=(6.128+0.637+0.441+32.143)\times10^{-5}\ \text{m}\cdot\text{kN}^{-1}=3.94\times10^{-4}\ \text{m}\cdot\text{kN}^{-1}$$

$$\Delta_{1P}=\sum\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}dx=2.05\times10^{-2}\ \text{m}$$

将系数和自由项代入力法方程，解得

$$X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=-52.03\ \text{kN}$$

由此求出加劲梁的弯矩和加劲杆的轴力，如图 6-15e 所示。

现再分析一下忽略受弯杆件轴向变形带来的误差。反映这一影响的是以上 δ_{11} 中括号内的第二项，忽略此项影响后，组合梁的内力将如图 6-15f 所示，误差为 1.81%。可见，在超静定组合结构中，受弯杆件轴向变形对内力的影响一般可以忽略。

现结合上述加劲梁的实例，讨论结构的受力分析与工程设计之间的关系。

例 6-6 的组合梁若去除加劲杆则成为一根简支梁，在相同荷载的作用下截面最大弯矩将达到 100 kN·m，显然加劲杆的作用是明显的，可以减少梁截面正弯矩 50%以上。但在工程设计中同时应注意：设加劲杆后梁上出现了负弯矩；荷载作用点至 C 结点之间的杆段截面上的剪力将增大 1 倍以上；另竖杆可能出现因受压失稳破坏问题。这些问题在横梁的截面、配筋与构造设计以及竖杆的设计中均应当充分考虑到。实际上，结构的合理性还取决于受力性能之外的许多因素。在解决一个方面的问题时，应注意处理好由此引起的其他问题。

§6-5　对称性的利用

在实际工程中，许多结构是对称的。利用对称性常可以使结构的受力分析得以简化。

对于平面结构来说，所谓对称是指结构的全部构成对称于某一几何轴线。也就是说，若将结构绕该几何轴线对折后，结构轴线两侧应彼此完全重合。结构的对称包括几何形状、联结和支座情况以及杆件的截面尺寸和材料性质等诸方面。

对称结构的基本受力特点是：在对称荷载作用下，结构的变形和内力都是对称的；在反对称荷载作用下，结构的变形和内力则都是反对称的。这里，对称荷载是指绕轴对折后，轴线两侧荷载的作用点、大小和方向能完全重合；反对称荷载则是指绕轴对折后，轴线两侧荷载的作用点和大小重合，但方向却相反。结构变形和内力的对称或反对称也是按上述原则定义的。图 6-16 为一对称刚架，分别受对称和反对称荷载作用时的变形和弯矩图形。

作用于对称结构上的任意荷载，都可以分解为一组对称荷载和另一组反对称荷载。例如，图 6-17 所示为一对称刚架，受到集中荷载和三角形分布荷载作用，可将荷载分解为对称和反对称

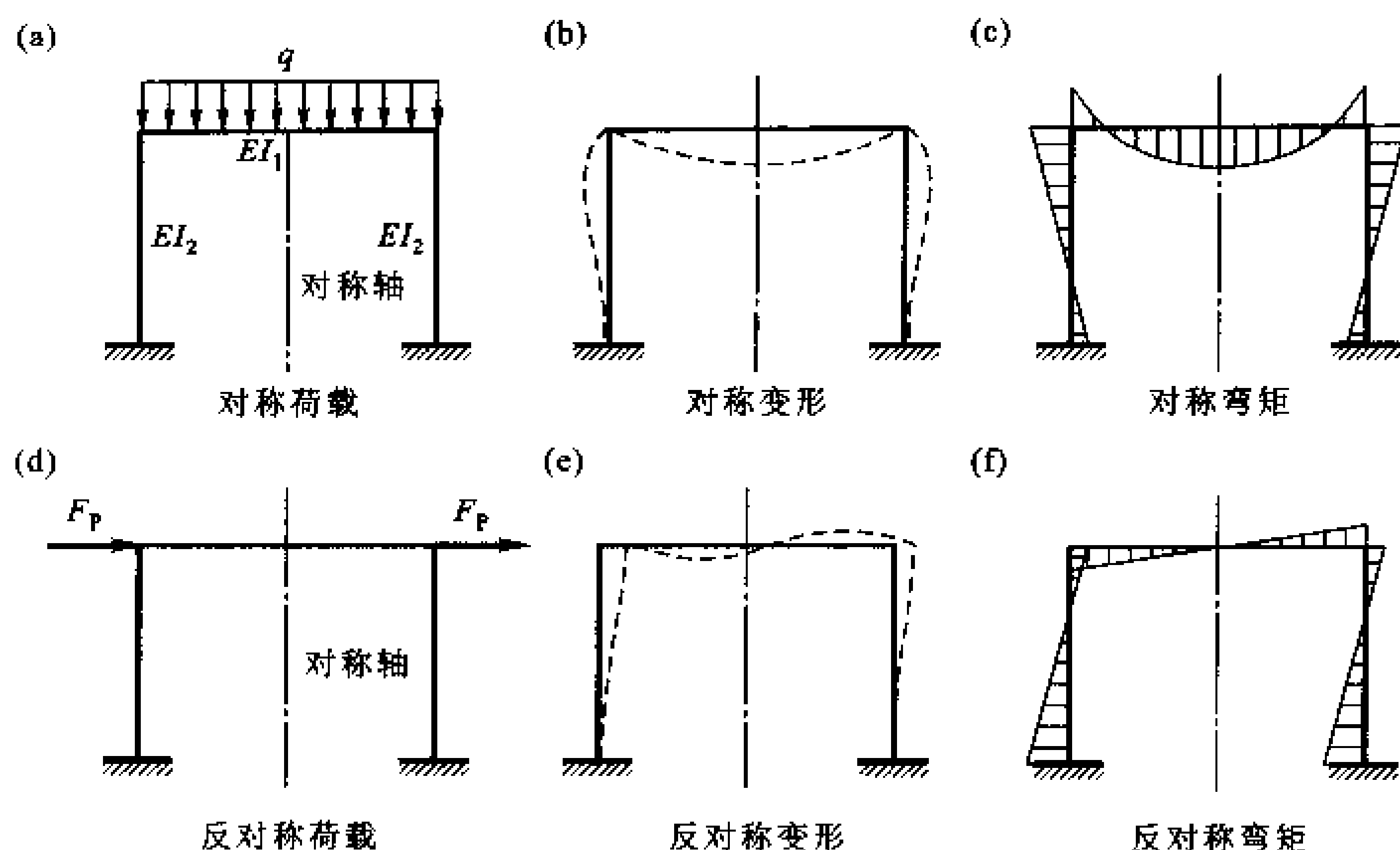


图 6-16

荷载的情况。图 6-17b、c 所示荷载叠加后即得原结构所承受的荷载。根据叠加原理,原结构的变形和内力就等于上述两组荷载分别作用的效果之和。由此可见,只要结构是对称的,对称性的利用就成为可能,求解时应充分利用对称结构在对称和反对称荷载作用下的基本受力特点,简化计算过程。

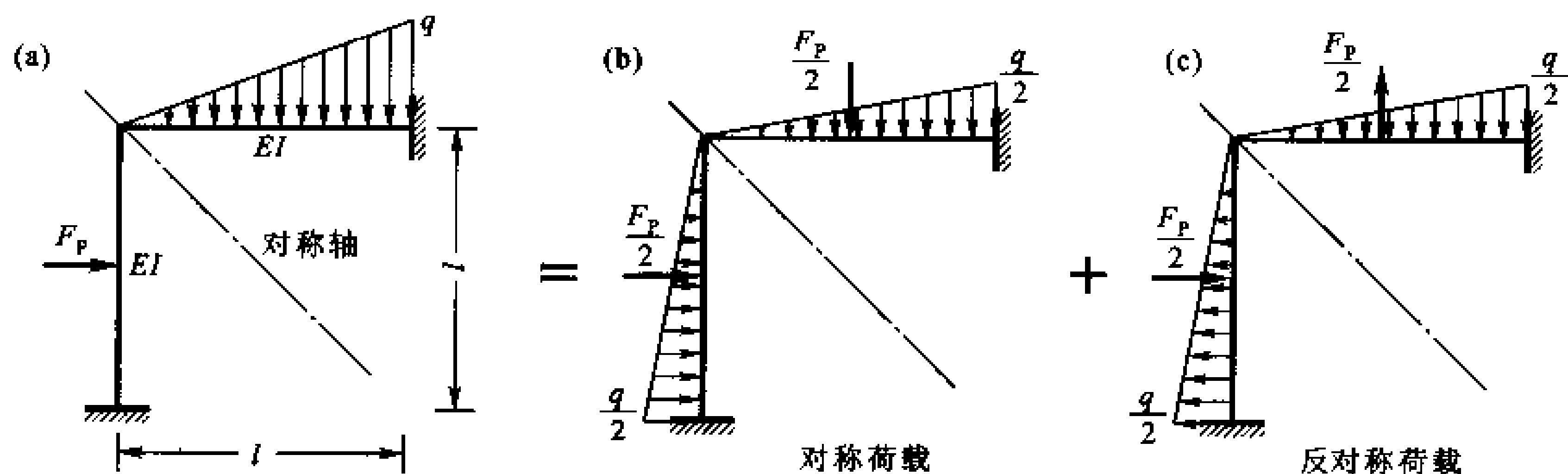


图 6-17

位于对称结构对称轴位置上的荷载、位移和杆件截面内力,其对称或反对称的属性应如何判定呢?现结合图 6-18a 所示的对称刚架进行分析。作用于对称轴位置上的竖向荷载 F_{P1} 明显属于对称荷载,而水平荷载 F_{P2} 和力矩 M 则属于反对称荷载。要理解这一点,不妨将原荷载视为无限靠近对称轴的两个半荷载,然后绕轴对折后,荷载的方向相同与否即可判定其对称或反对称的属性。同理,该刚架对称轴截面上的竖向位移属于对称位移,而水平位移和转角则属于反对称位移。杆件的截面内力属于作用力与反作用力,如图 6-18b 所示,按内力或截面应力绕轴对

折后方向相同与否可以判定,对称轴位置上的轴力属于对称内力;剪力属于反对称内力;横梁跨中截面处的弯矩属对称内力;而中间竖杆的截面弯矩则属于反对称内力。以上所述可以归结为表 6-2。

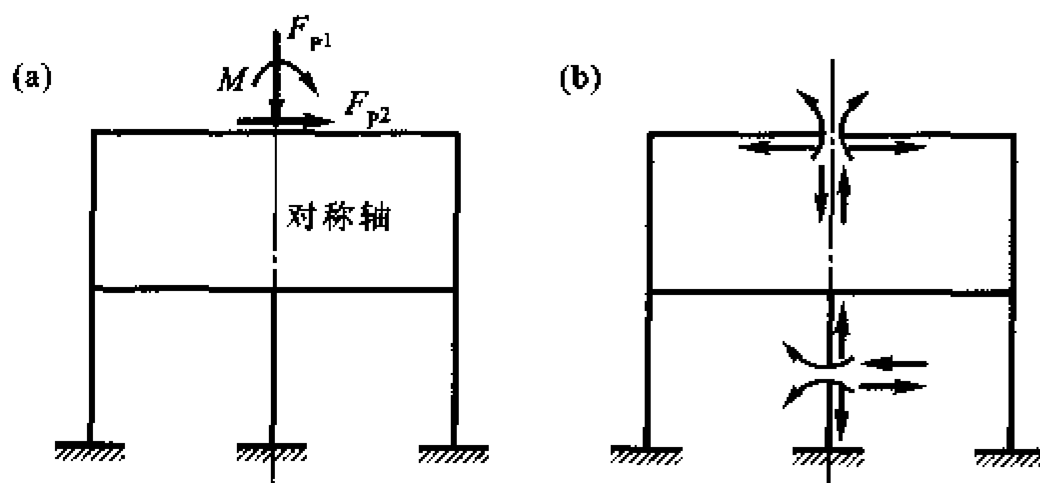


图 6-18

表 6-2　对称轴位置荷载、位移和内力的属性

类别	对称	反对称
荷载	力沿对称轴	力垂直对称轴、力矩
位移	沿对称轴	垂直对称轴、转角
内力	轴力、横杆截面弯矩	剪力、竖杆截面弯矩

由此可推知,在对称荷载作用下,对称轴位置上杆件的剪力和沿对称轴杆件的截面弯矩必定为零;在反对称荷载作用下,对称轴位置上杆件的轴力和垂直对称轴杆件的截面弯矩必定为零。

以下来讨论如何利用对称结构的上述特性,简化力法的分析计算。

6-5-1　选取对称的基本结构

力法的基本结构是将原结构的多余约束撤除,代以相应未知力后得到的体系。选取对称的基本结构可以使力法方程中的部分副系数和自由项数值为零,从而简化计算。

图 6-19a 表示一对称门式刚架,若采用图 6-19b 所示的对称基本结构,各单位弯矩图分别如图 6-19c、d、e 所示。其中由对称未知力 $X_1=1$ 和 $X_2=1$ 引起的 $\overline{M}_1$ 图和 $\overline{M}_2$ 图是对称的;由反对称未知力 $X_3=1$ 引起的 $\overline{M}_3$ 图是反对称的。于是,有

$$\delta_{13}=\delta_{31}=\sum\int\frac{\overline{M}_1\overline{M}_3}{EI}\mathrm{d}s=0$$

$$\delta_{23}=\delta_{32}=\sum\int\frac{\overline{M}_2\overline{M}_3}{EI}\mathrm{d}s=0$$

于是,力法方程可简化为

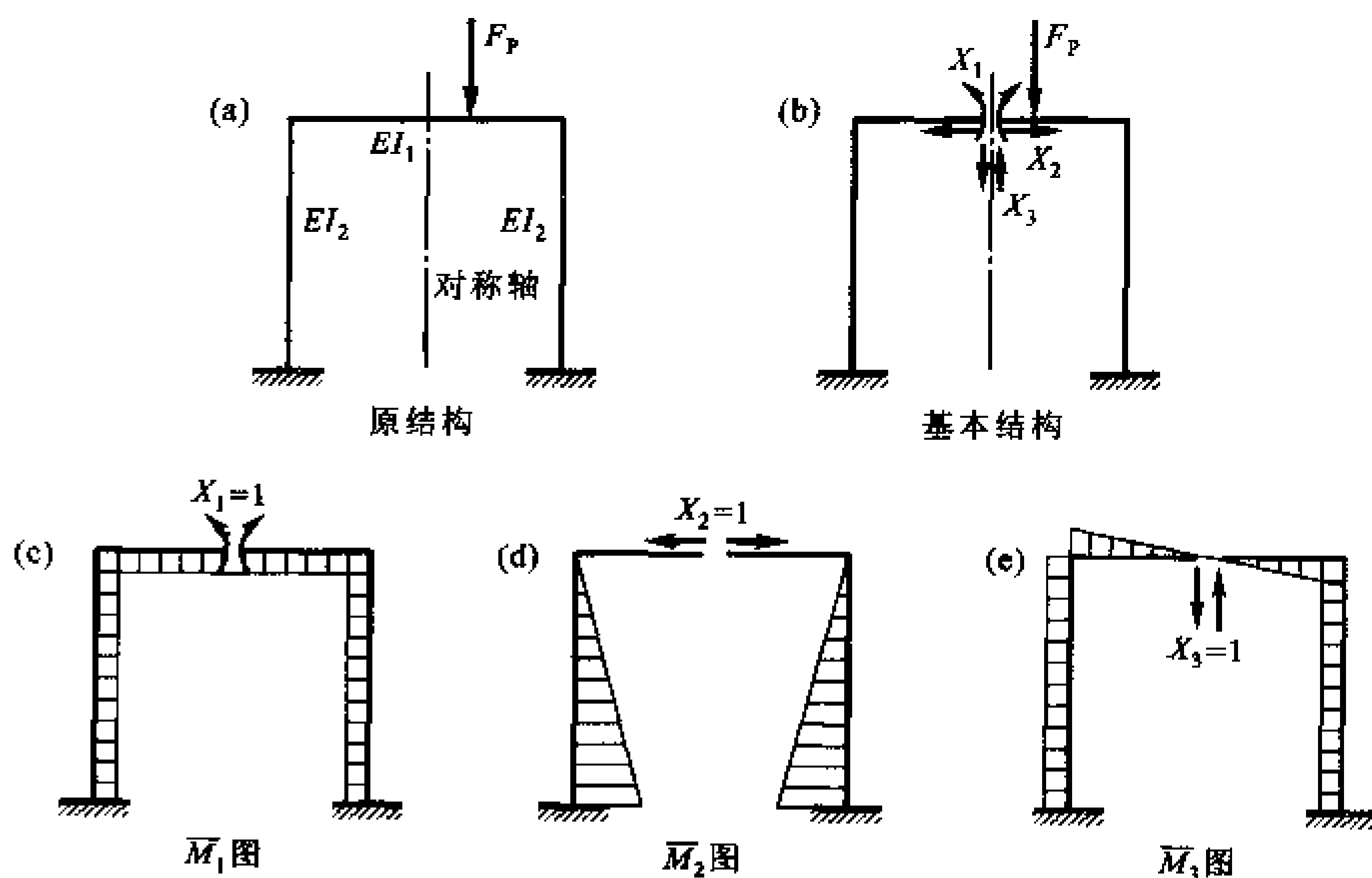


图　6-19

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0\\ \delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0\end{aligned}\right\}$$

由此可以看出，对称结构若选取对称的基本结构，则力法方程自然就分解成两组。一组只包含对称未知力；另一组只包含反对称未知力。这是因为对称未知力不会引起反对称的位移；同样，反对称未知力也不会引起对称的位移，这就使得相关的副系数为零。于是，原力法方程组自然就分解为两个非耦联的低阶方程组，使计算得到简化。此时，若荷载对称，则力法方程中的反对称未知力必等于零；若荷载反对称，则对称未知力必等于零。这样，就使计算可进一步简化。对于一般荷载作用的情况，可以根据求解的需要分解为对称荷载和反对称荷载分别计算，而后叠加。

以上对称性利用的基本原理，可以通过选取成对未知力的方法，推广应用到力法基本未知量不位于对称轴上的情况。例如，对于图6-20a所示的对称超静定刚架，若取图6-20b的基本结构，则相应的单位弯矩图将不具有对称或反对称性质。若取如图6-20c的基本结构，将支座A和B处的未知竖向反力视为一组对称未知力Y_1与另一组反对称未知力$Y_2$①叠加的结果，此时，单位弯矩图如图6-20d和e所示，分别具有对称或反对称的性质。于是，力法方程的副系数$\delta_{12}=\delta_{21}=0$，成为两个非耦联的独立方程

$$\delta_{11}Y_1+\Delta_{1P}=0$$

$$\delta_{22}Y_2+\Delta_{2P}=0$$

以上Y_1和Y_2均为成对的未知广义力，而力法方程表达了与广义力相应的广义位移应等于零。解出Y_1和Y_2之后，原结构A、B支座的反力X_1和X_2可按叠加法求得，即

① 这里，成对的未知力可以是成对的未知广义力，所以本书仍沿以往教材中使用的Y_i表示。

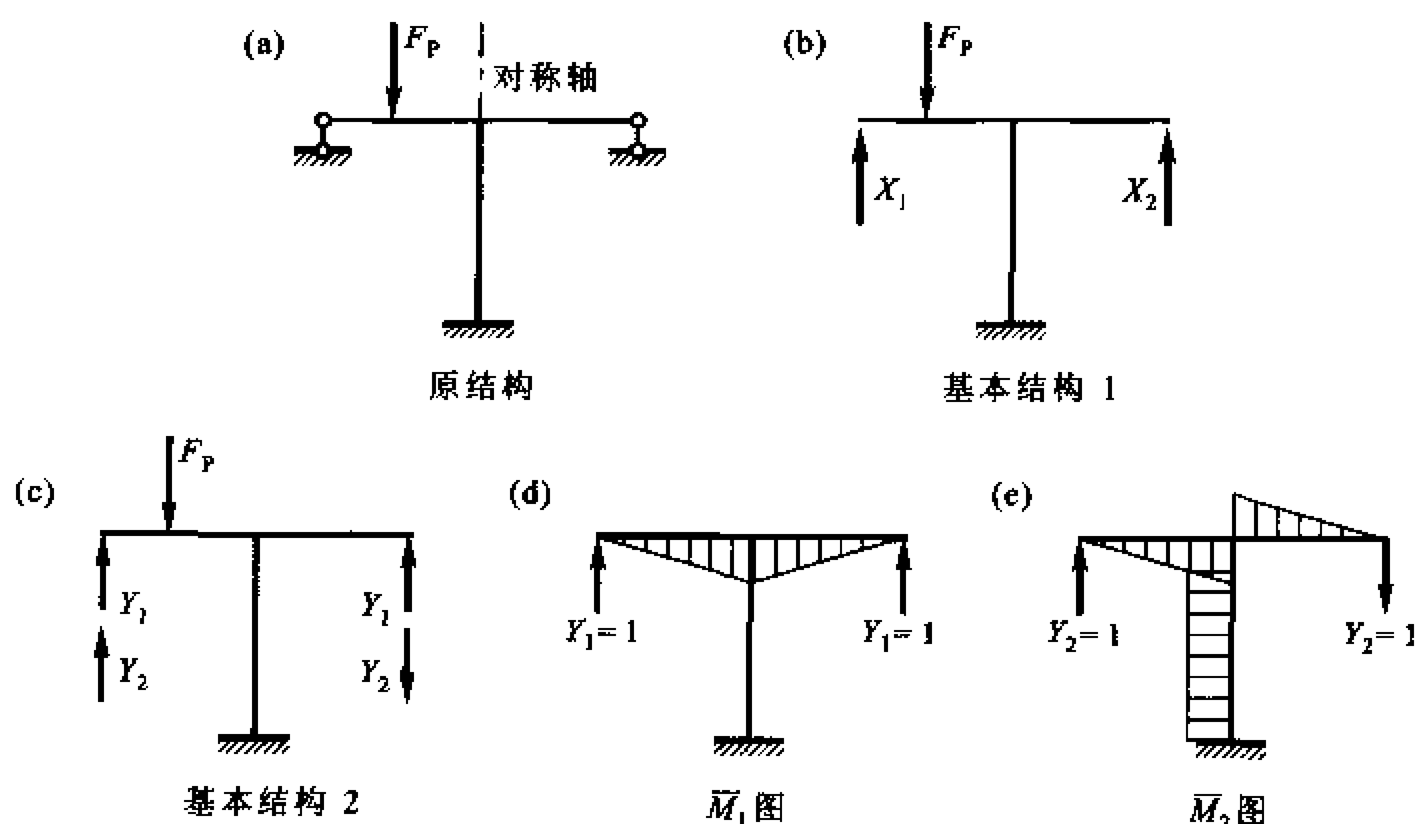


图 6-20

$$X_1 = Y_1 + Y_2,\quad X_2 = Y_1 - Y_2$$

例 6-7 试求图 6-21a 所示刚架的弯矩图。设各杆 EI = 常数。

解 这是一个六次超静定的对称刚架，受反对称荷载作用。分析时可将位于对称轴上 H 截面处的刚性联系撤除，并撤除支座 A、C 处的水平约束和支座 B 处的竖向约束，得基本结构如图 6-21b 所示。支座 A、C 处的未知水平约束力采用成对未知力，因为荷载是反对称的，所以对称约束力为零，仅存在反对称约束力 X_1；支座 B

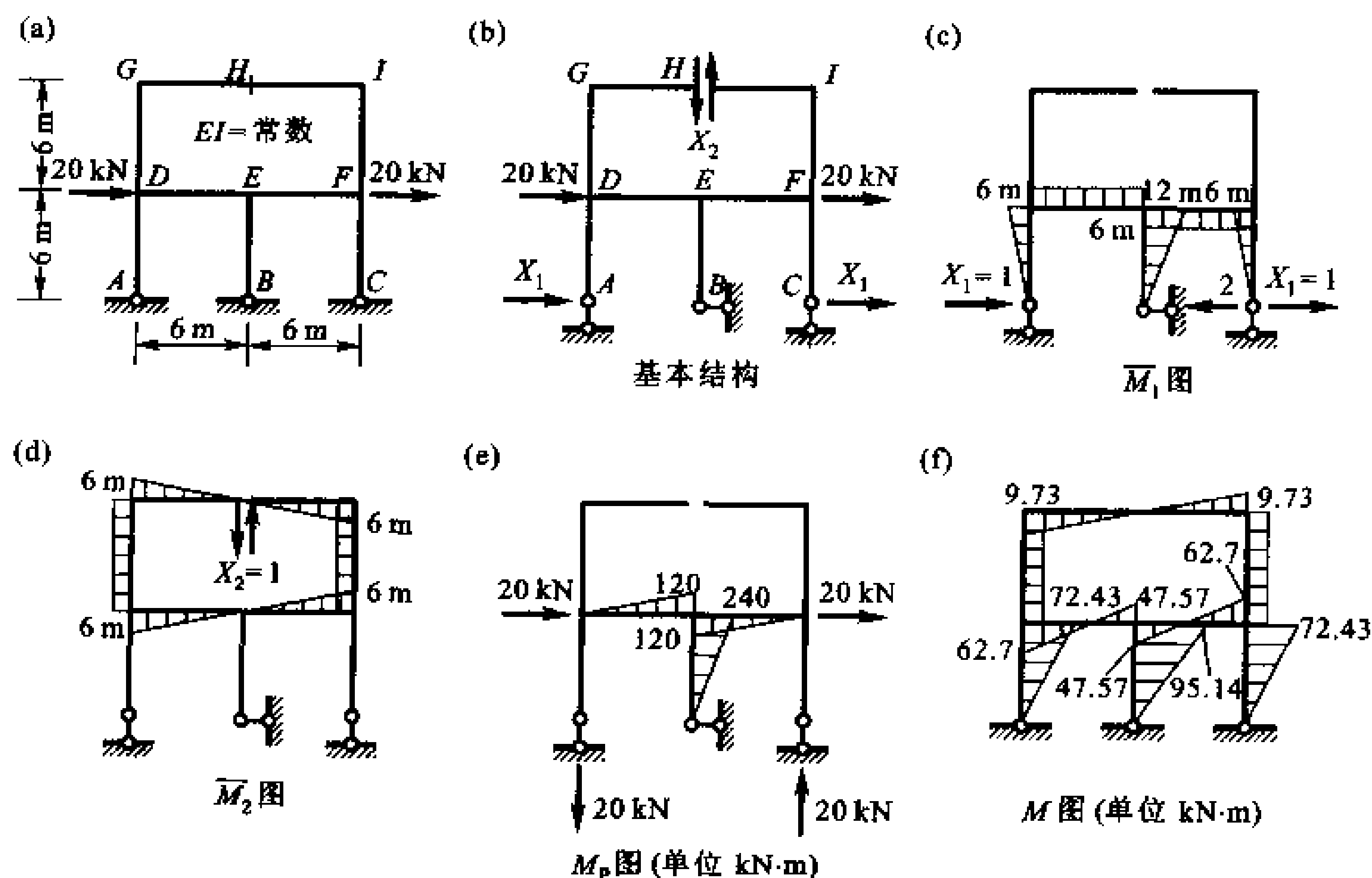


图 6-21

位于对称轴上，竖向约束反力属于对称力必定为零。同理，位于对称轴上 H 点切口处只存在反对称内力 X_2。因此，在利用了对称性之后，力法基本未知量的数目仅剩两个，单位弯矩图和荷载弯矩图分别如图 6－21c、d 和 e 所示。此时，力法方程为

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0$$

$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0$$

力法方程的系数和自由项可以采用图乘法计算，结果如下：

$$\delta_{11}=\frac{864}{EI}\ \mathrm{m}^3,\quad \delta_{22}=\frac{720}{EI}\ \mathrm{m}^3,\quad \delta_{12}=\delta_{21}=-\frac{216}{EI}\ \mathrm{m}^3$$

$$\Delta_{1P}=\frac{10\ 080}{EI}\ \mathrm{kN\cdot m^3},\quad \Delta_{2P}=-\frac{1\ 440}{EI}\ \mathrm{kN\cdot m^3}$$

将上述系数和自由项代入力法方程，化简后得

$$864X_1-216X_2+10\ 080\ \mathrm{kN}=0$$

$$-216X_1+720X_2-1\ 440\ \mathrm{kN}=0$$

解此方程组得

$$X_1=-12.07\ \mathrm{kN},\quad X_2=-1.62\ \mathrm{kN}$$

求得了多余约束力 X_1、X_2 之后，即可根据平衡条件，或是按照式(6－4)的叠加法计算杆件弯矩，并绘出刚架弯矩如图 6－21f 所示。

6－5－2 取半边结构

利用对称结构在对称和反对称荷载作用下的基本受力特点，可以按照变形和内力与原结构等价的原则，先截取半边结构分析计算，然后再根据对称性得到整个结构的内力。一般地说，半边结构的超静定次数常低于原结构，这样就可以使计算得到简化。以下分别以奇数跨和偶数跨的对称刚架为例，说明取半边结构的分析方法。

图 6－22a 所示为一单跨对称刚架，受对称荷载作用。此时，刚架的变形和内力应是对称的，故位于对称轴上的 K 截面处无水平位移和转角发生，仅可发生竖向位移；同理，K 截面处仅可能有弯矩和轴力而无剪力发生。因此，在取半边结构计算时，在该截面处应采用滑动支座代替原有的联系，得到如图 6－22b 所示的计算简图，其变形和内力与原结构中的情况是相同的。

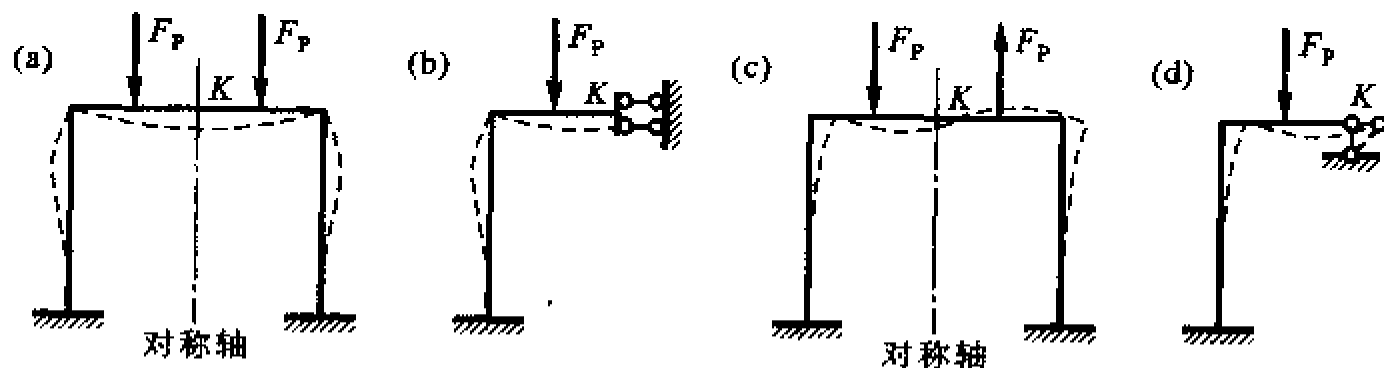


图 6－22

若上述刚架受反对称荷载作用，如图 6－22c 所示，则变形和内力应是反对称的，此时位于对称轴上的 K 截面处无竖向位移发生，但可以有水平位移和转角；同理，K 截面处仅可有剪力而无弯矩和轴力。因此，在取半边结构计算时，在该截面处应采用竖向链杆代替原有的联系，得到如图 6－22d 所示的计算简图。

对于奇数跨刚架，均可以按照上述原则取半边结构分析，以简化计算。以下再讨论偶数跨刚架。

图6-23a所示为一两跨对称刚架，受对称荷载作用。位于对称轴上的 K 结点应无水平位移和转角发生，在忽略杆件的轴向变形后也没有竖向位移，但在 K 结点两侧有弯矩、剪力和轴力存在；在取半边结构计算时，可将该处用固定支座代替，得到如图6-23b所示的计算简图。此时，刚架的中柱仅受轴力作用，其数值应等于 K 处固定支座竖向反力的2倍。

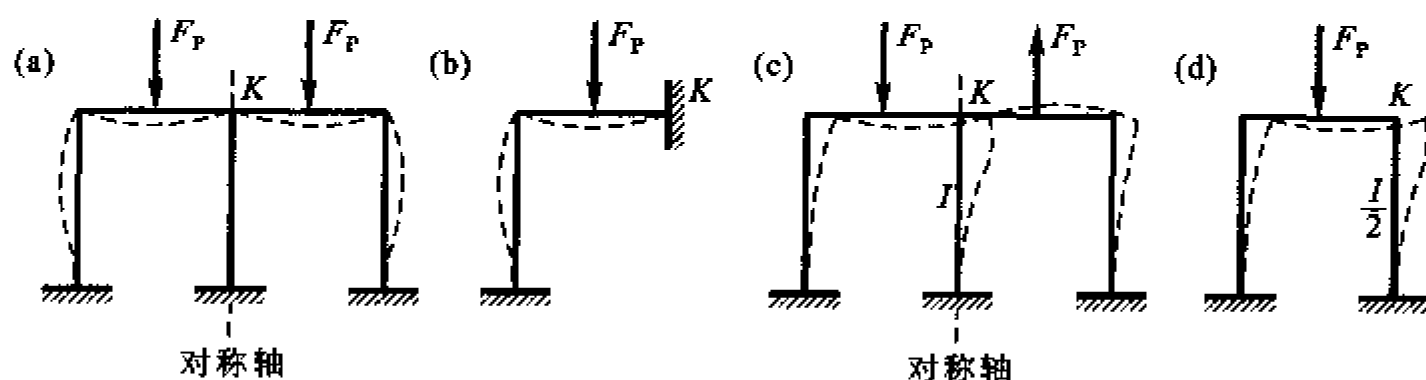


图 6-23

若上述刚架受反对称荷载作用，如图6-23c所示，在取半边结构计算时可以假想沿结构所在平面将中柱对剖为前、后两半，相应的横截面惯性矩各为原截面的一半，分别参与左、右两个半刚架的工作，得到如图6-23d所示的计算简图。但在按反对称原则将半边结构的内力延拓至全结构时应注意，刚架的中柱所承受的弯矩和剪力应为按半结构计算时所得结果的2倍，而中柱的轴力因属于对称内力，两半结构叠加的结果中柱轴力必定为零。

无论是奇数跨或偶数跨的对称刚架，若有荷载作用在对称轴位置，则在取半边结构时应取该荷载值的一半，另一半荷载将由另一半边结构承受。

例6-8 试分析图6-24a所示刚架，并绘制弯矩图。设各杆 EI 相同。

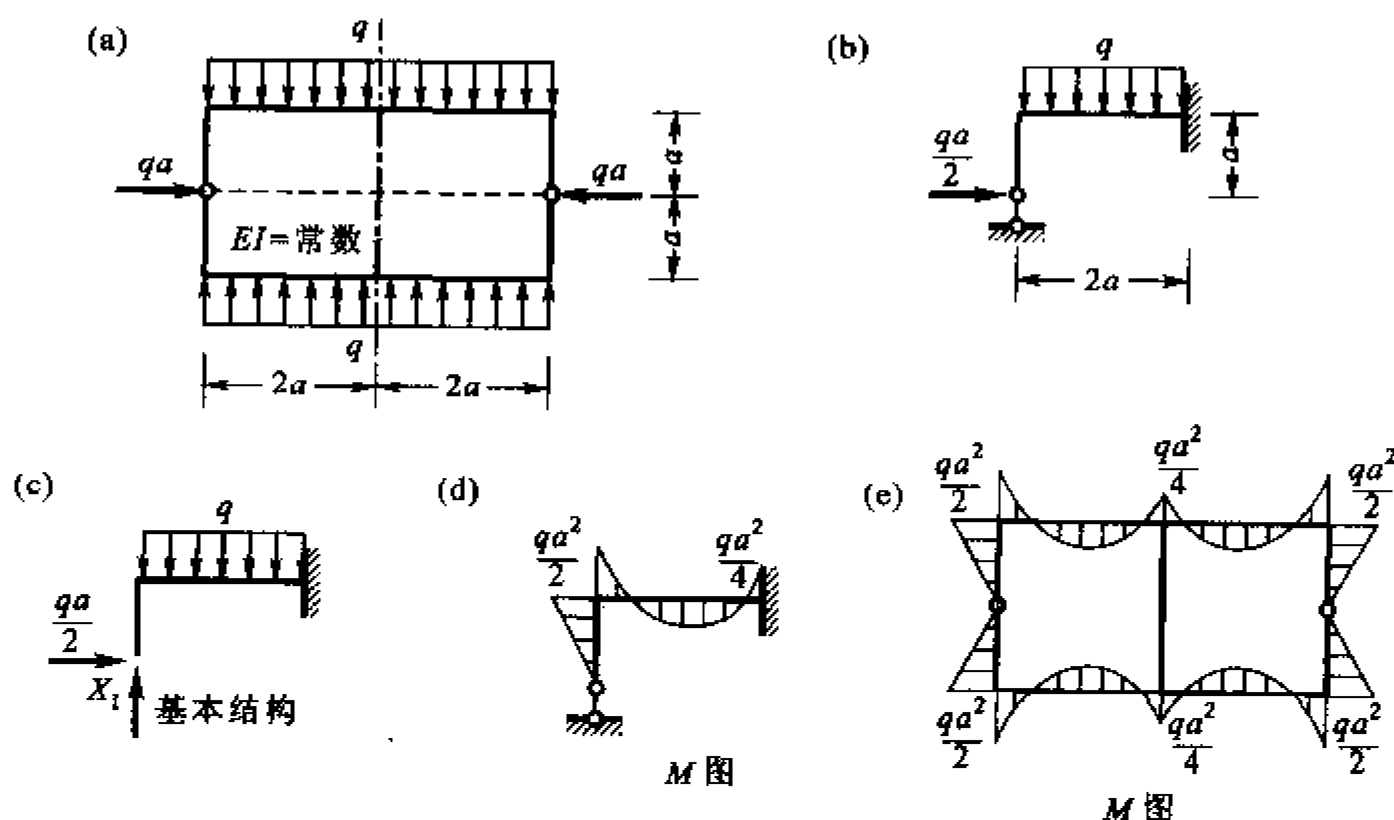


图 6-24

解 此刚架是四次超静定结构，有竖向和横向两根对称轴，两个方向上刚架分别为偶数跨和奇数跨的。根据刚架在对称荷载作用下的变形和内力特点，可以取其$\frac{1}{4}$进行分析，注意到两侧竖杆中点均为铰结，计算简图应如图6－24b所示。此时，超静定次数已降低为一次，可以取基本结构如图6－24c，并用力法求得弯矩图如图6－24d所示。

在求得$\frac{1}{4}$刚架的弯矩图后，可以根据内力对称的原则绘制出图6－24e所示原刚架的弯矩图。注意，位于对称轴上的刚架竖杆无弯矩和剪力作用，其轴向压力等于计算简图中固定支座竖向反力的2倍。

以下讨论与例6－8相关的基本概念。首先是，若需要考虑杆件（轴向刚度EA＝常数）轴向变形的影响，计算简图应如何选取。此时，位于对称轴上的刚架竖杆会发生压缩变形，该竖杆端部显然不能再视作固定支座，而应改用滑动支座，并应保留竖杆的作用。在取半边结构时该竖杆的轴向刚度应取$\frac{1}{2}$值，得计算简图如图6－25a或b所示。

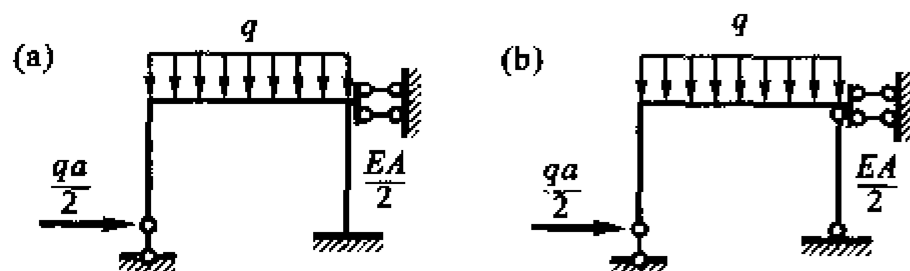


图 6－25

此外对于例6－8图6－24b所示的计算简图，也可以直接利用有关基本超静定杆件的现成图表进行计算，从而避免力法求解。为此，可分别考虑作用于基本结构的荷载，如图6－26a、b所示。因支座竖向链杆反力不会引起竖杆弯矩，图6－26a中的横梁相当于一端固定另一端为铰支，在均布荷载作用下的弯矩图形可有现成图表给出；图6－26b中竖杆和横梁左端的弯矩是静定的，即可以利用平衡条件求得；横梁右端的弯矩按有关图表应为左端主动力矩的一半，其作用方向与主动力矩相同。将图6－26a、b所示的弯矩图叠加，即可得到图6－24d的弯矩图。

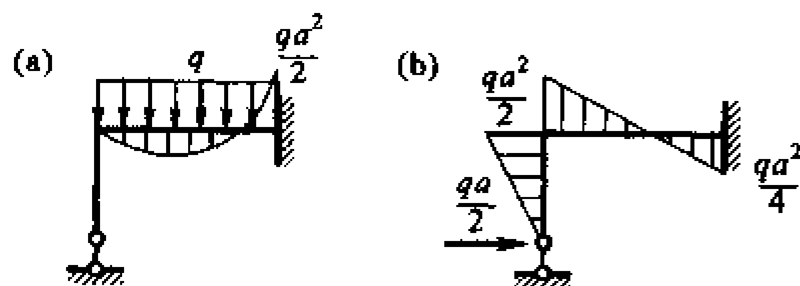


图 6－26

例6－9 试分析图6－27a所示刚架，并绘制弯矩图。设各杆EI＝常数。

解 此刚架是四次超静定的对称结构，为利用对称性，可将荷载按对称和反对称分解，分别如图6－27b、c所示。

在对称的结点荷载作用下，忽略杆件的轴向变形后该刚架结点处无线位移和角位移，荷载是由杆件的轴力平衡，刚架中无弯矩和剪力发生；在反对称荷载作用下，位于对称轴上二力杆的轴力必定为零，半边结构的计算简图应如图6－27d所示，为一次超静定的。可以取图6－27e的基本结构，并用力法求出半边结构的弯矩图如图6－27f。然后，按内力反对称的原则绘出原刚架的弯矩图，如图6－27g所示。

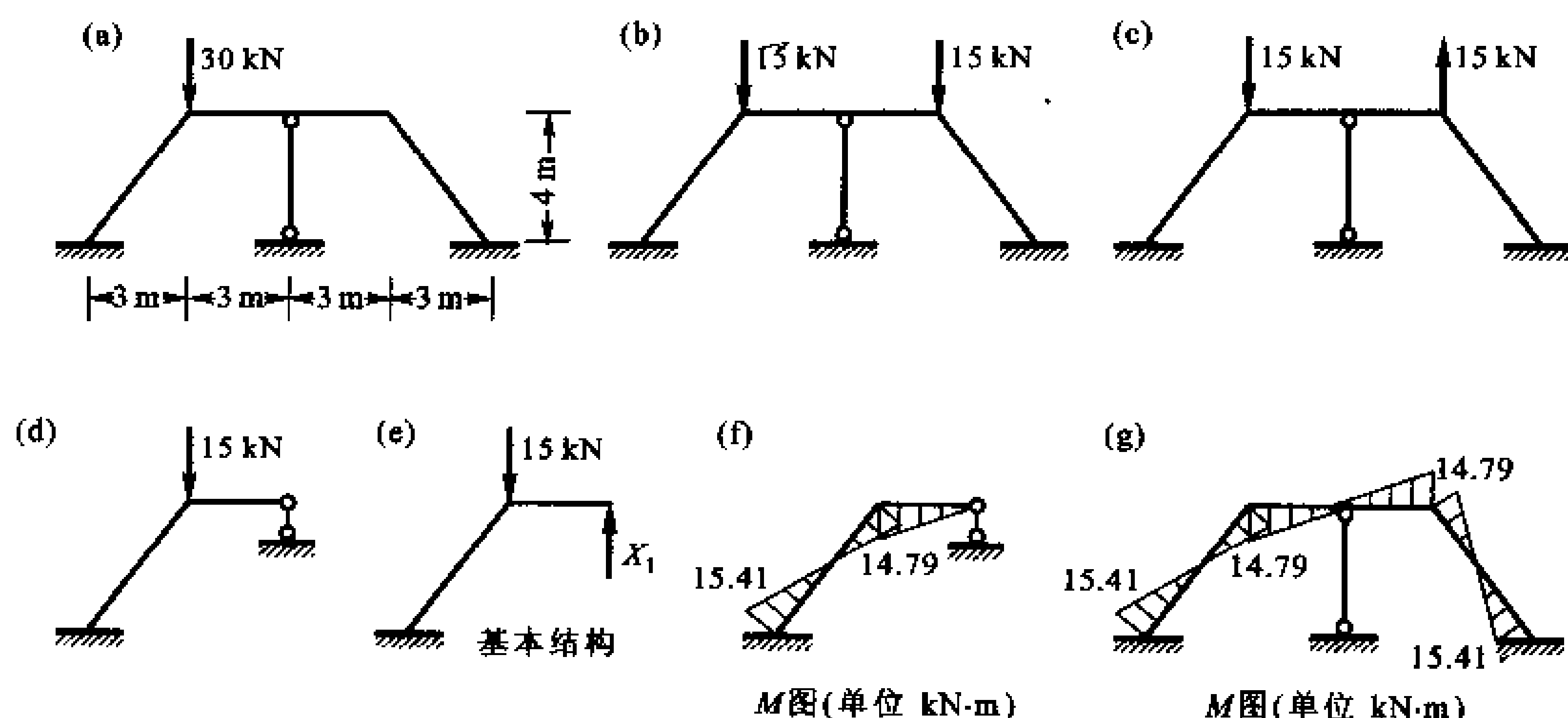


图 6-27

例 6-9 的刚架若对称荷载中包括非结点荷载，则在对称荷载作用下刚架一般也将有弯矩产生。此时，刚架的弯矩图将由对称和反对称荷载作用下的弯矩图叠加得到。

超静定桁架也可以利用对称性简化计算。例如，对于图 6-28a 所示的一次超静定对称桁架，因荷载是反对称的，即可以判定 CD 杆的内力为零，且 A、B 支座的反力具有反对称性质。于是，可按图 6-28b 所示的静定桁架计算。

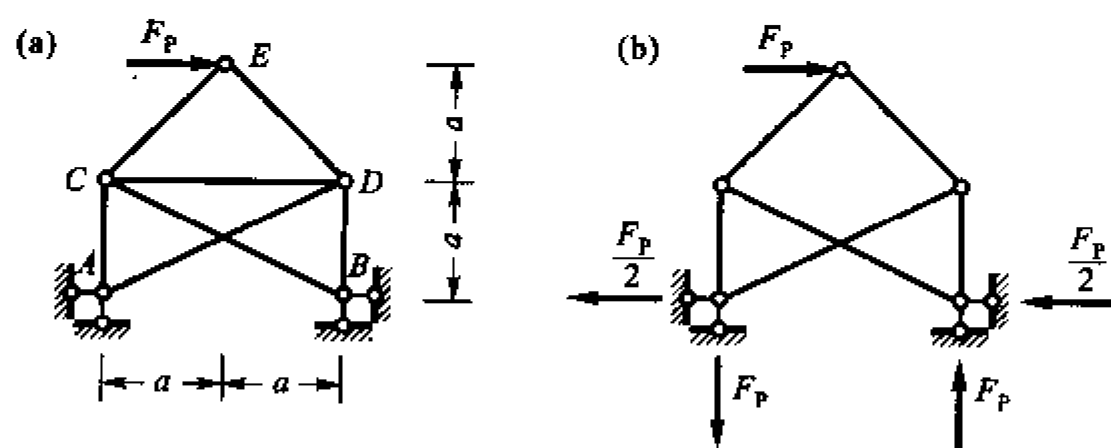


图 6-28

若几何和材料性质对称的结构含有不对称的支座，在利用对称性时可将不对称的支座反力分解为对称和反对称力，在取半边结构时应注意其变形和内力情况需符合于原结构。例如，图 6-29a所示刚架，荷载和 D 支座的反力可如图 6-29b、c 所示分解为一组对称、另一组为反对称

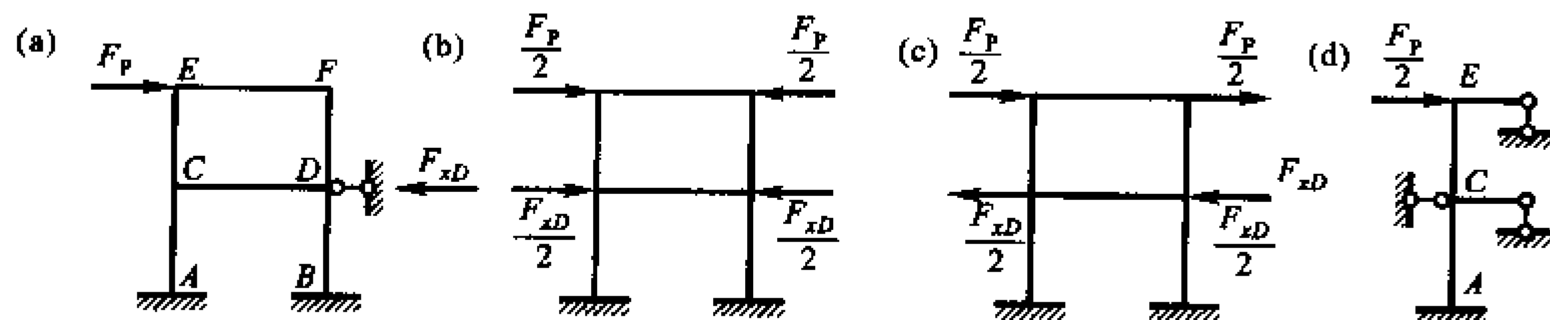


图 6-29

的力。对称力作用下(图 6－29b)刚架仅有横梁轴力;反对称力作用下(图 6－29c)可取图 6－29d 所示的半边结构计算简图。注意,此时水平支杆应加在 C 结点处。刚架的最终内力可以通过叠加得到。

值得一提的是,在利用计算机计算对称结构时,也常可采用半边结构的计算简图。此外,对称性利用的原则在杆件体系之外的连续体力学以及其各类数值分析中同样具有广泛的应用。合理利用对称性的关键在于:保证计算模型的受力特性与原结构完全一致。

§6－6　支座位移、温度变化等作用下超静定结构的计算

工程结构除了承受荷载之外,还常受到支座位移、温度变化或者是装配式结构构件制作误差等因素的作用,可统称为非荷载因素作用。结构在非荷载因素作用下是否产生内力,完全取决于它在受到这些因素作用时,变形是否为充分自由的。若可以自由地变形,则不会引起结构的内力,否则将使结构产生内力。

图 6－30a、b 所示为静定伸臂梁分别受到支座位移和温度变化作用时发生自由变位的情况。两种情况下梁均无内力和反力发生。但若在上述梁的 C 端增加一支座链杆,成为图 6－30c、d 所示的超静定梁,在同样的非荷载因素作用下,梁的变形就将受到约束,显然此时梁上有内力和反力发生。超静定结构由于存在多余约束,在非荷载因素作用下一般会产生内力和反力,这是超静定结构不同于静定结构的重要特性之一。

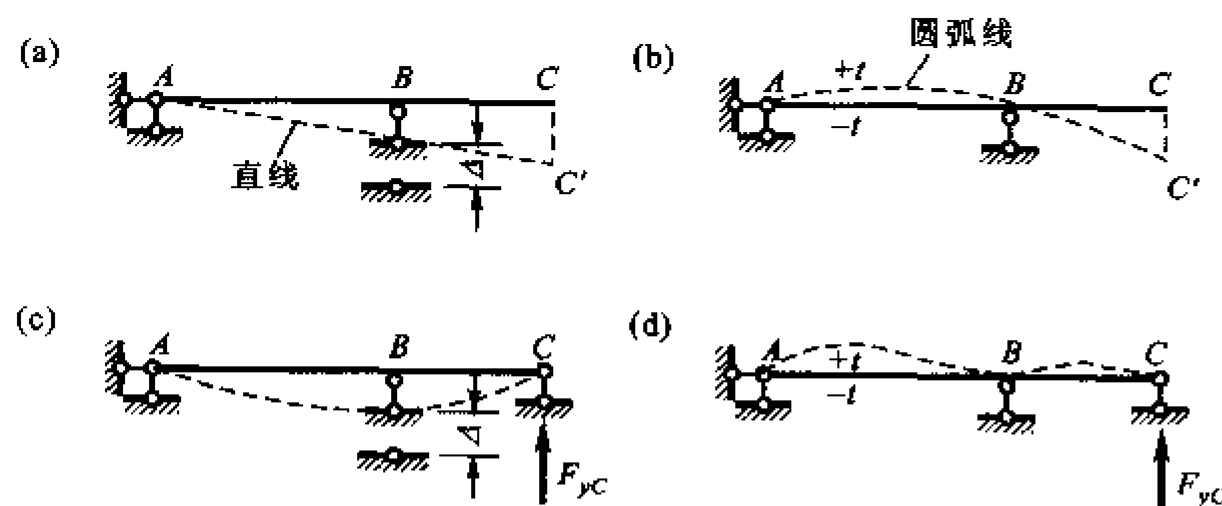


图　6－30

用力法分析非荷载因素作用下的超静定结构,其基本原理以及分析步骤与在荷载作用下时相同,差别只是力法典型方程中的自由项不再是由荷载引起,而是由支座位移、温度变化等因素引起的基本结构在多余约束力方向上的位移。例如,在求解图 6－30c、d 所示的连续梁时,可将 C 支座反力 F_{yC} 作为基本未知量,此时力法方程的自由项就等于图 6－30a、b 中的 $-CC'$。F_{yC} 仍可根据 C 点竖向位移为零的变形协调条件,由力法方程解出。

工程结构受非荷载因素的作用有时会产生很大的内力,甚至可以造成结构的破坏。在工程设计中,一般应该按照有关设计规范的要求采取必要的措施,减小上述非荷载因素的作用,并对其影响予以充分的考虑。

6-6-1 支座位移作用

在计算支座位移作用下 n 次超静定结构的内力时，力法典型方程中第 i 个方程的一般形式可写为

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}X_j+\Delta_{ic}=\Delta_i \qquad (6-5)$$

式中 δ_{ij} 为柔度系数；Δ_{ic} 表示基本结构在支座位移作用下在 X_i 方向的位移；Δ_i 表示原结构在 X_i 方向的位移。以上均以与未知力方向一致为正，反之，则为负。力法方程的实质，即物理含义仍然是，基本结构在各多余约束力以及支座位移共同作用下，在多余约束力方向上的位移应符合于原结构。

对于同一个超静定结构，力法基本结构的选取可以不同，此时力法方程中的常数项 Δ_{ic} 和 Δ_i 的数值一般亦不相同。图 6-31a 所示刚架，假设由于某种原因支座 A 发生向下竖向位移 a 和顺时针转角 θ，支座 B 发生向右水平位移 b。图 6-31b、c、d 分别为三种可能选取的基本结构。原结构在支座位移作用下沿多余约束力方向的位移 Δ_1 和 Δ_2 可按照已知的支座位移条件得到；基本结构因是静定的，在支座位移作用下，发生的是刚体位移，Δ_{1c} 和 Δ_{2c} 一般易从刚体位移的几何关系中求得，也可以利用单位荷载法计算。例如，对于基本结构 3，在支座位移作用下 B 结点沿 X_1 方向的位移，可以由图 6-31e 的刚体位移图中得出，为 $\Delta_{1c}=h\theta$。Δ_{1c} 与支座 A 的竖向位移 a 以及原结构 B 支座的水平位移 b 无关。基本结构沿 X_2 方向的位移属杆件之间的相对转角，可由 AC 和 BC 杆转角相加得出，Δ_{2c} 也可以通过建立如图 6-31f 所示虚拟平衡状态，按单位

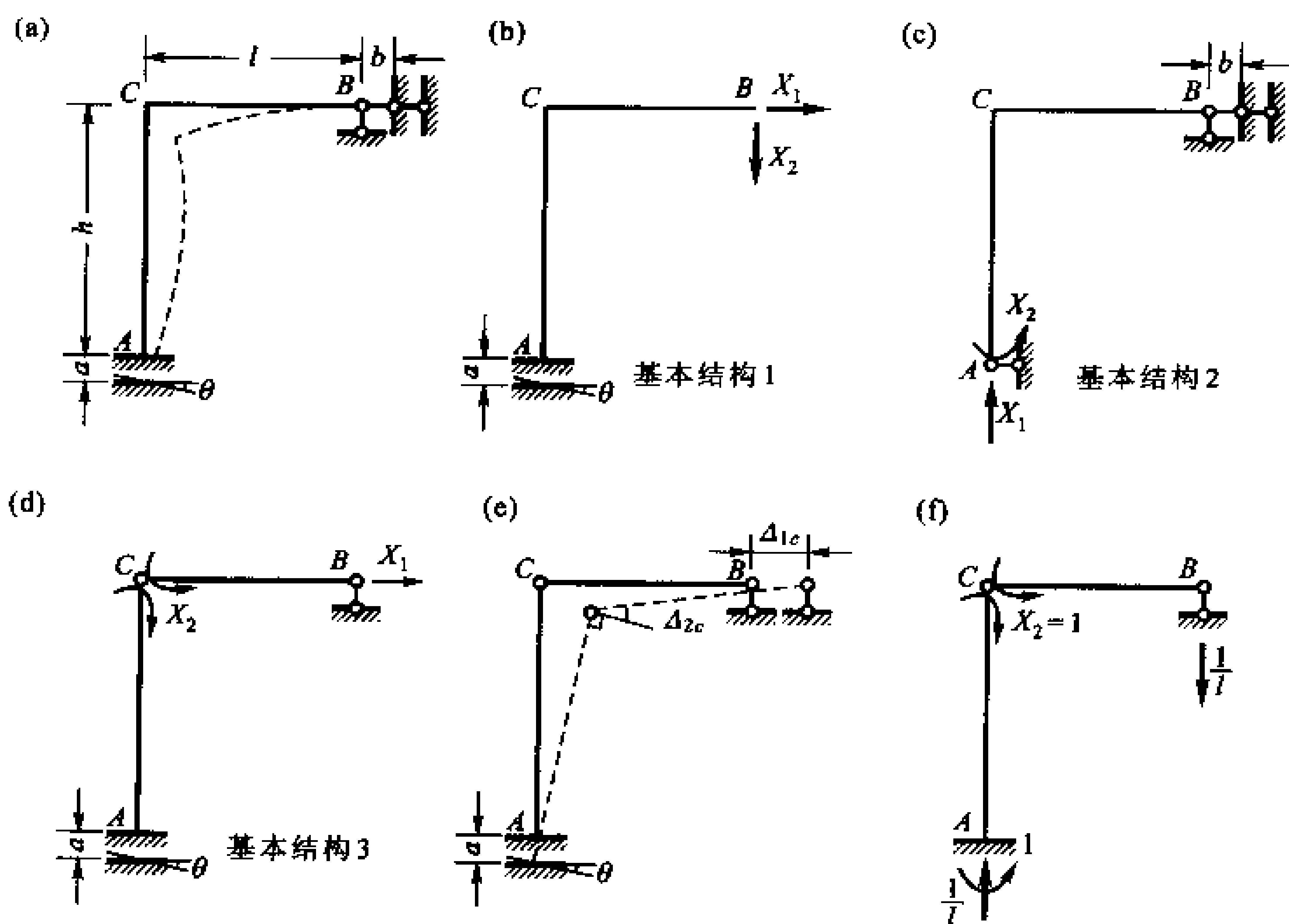


图 6-31

荷载法计算，即

$$\Delta_{2c} = -\sum \overline{F}_{R} c = \theta + \frac{a}{l}$$

三种基本结构相应的力法方程中的常数项可见表6－3。

表6－3 三种基本结构力法方程常数项

类别	Δ_{1c}	Δ_{2c}	Δ_1	Δ_2
基本结构1	$h\theta$	$a + l\theta$	b	0
基本结构2	$\frac{bl}{h}$	$-\frac{b}{h}$	$-a$	$-\theta$
基本结构3	$h\theta$	$\theta + \frac{a}{l}$	b	0

例6－10 试绘制图6－32a所示梁在已知支座位移作用下的弯矩图。

解 此梁是一次超静定的，取图6－32b所示的基本结构，力法方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1c} = \Delta_1$$

根据已知条件，梁 A 端的转角 $\Delta_1 = \theta$；$X_1 = 1$ 作用下基本结构的相应转角可由 $\overline{M}_1$ 图（图6－32c）自乘求得，即 $\delta_{11} = \frac{l}{3EI}$；支座位移作用于基本结构所引起梁 A 端的转角可由刚体位移关系求得，为 $\Delta_{1c} = -\frac{a}{l}$。$\Delta_{1c}$ 也可按图6－32c，利用单位荷载法求得。

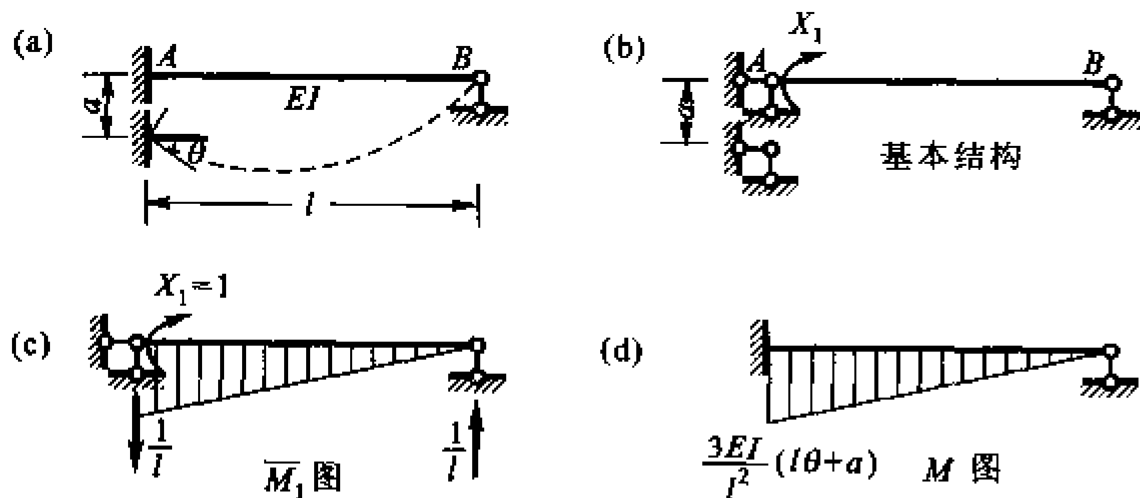


图 6－32

将上述系数和常数项代入力法方程可解得

$$X_1 = M_A = \frac{3EI}{l^2}(l\theta + a)$$

由此可求得梁的弯矩图如图6－32d所示。

由例6－10可以看出，超静定结构在支座位移作用下的内力和反力项中包含了截面的刚度，说明它们与杆件刚度的绝对值成正比。这与荷载作用下，超静定结构的内力和反力仅与杆件刚度的相对比值有关，与刚度的绝对值无关的情况是不同的。

6－6－2 温度变化作用

在温度变化作用下，n 次超静定结构的力法典型方程中，第 i 个方程的一般形式为

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}X_j+\Delta_{it}=\Delta_i \tag{6-6}$$

式中 Δ_{it}表示基本结构在温度变化作用下沿 X_i 方向的位移；Δ_i 表示原结构沿 X_i 方向的位移。力法方程仍反映了基本结构的位移应与原结构位移相符的变形协调条件。静定的基本结构在温度变化作用下的位移计算方法已在第 5 章中介绍。

图 6-33a 示一超静定刚架，设由于温度变化，杆件外侧温度升高 t_1，内侧温度升高 t_2（$t_1>t_2$），刚架的变形如图中虚线所示。取力法基本结构如图 6-33b，在多余约束力 X_1、X_2 和温度变化的共同作用下，基本结构 C 点的水平和竖向位移均应等于零。其中，多余约束力引起的位移计算前面已介绍；温度变化引起的位移，包括温度均匀升高 $t_0=\dfrac{t_1+t_2}{2}$ 引起的位移（图 6-33c）和杆件内、外侧温差 $\Delta t=t_1-t_2$ 引起的位移（图 6-33d）两部分，叠加后如图 6-33e 所示。图中 Δ_{1t}和Δ_{2t}可按式(5-12)计算，即

$$\Delta_{it}=\sum\alpha t_0A_{F_{Ni}}+\sum\alpha\frac{\Delta t}{h}A_{M_i}$$

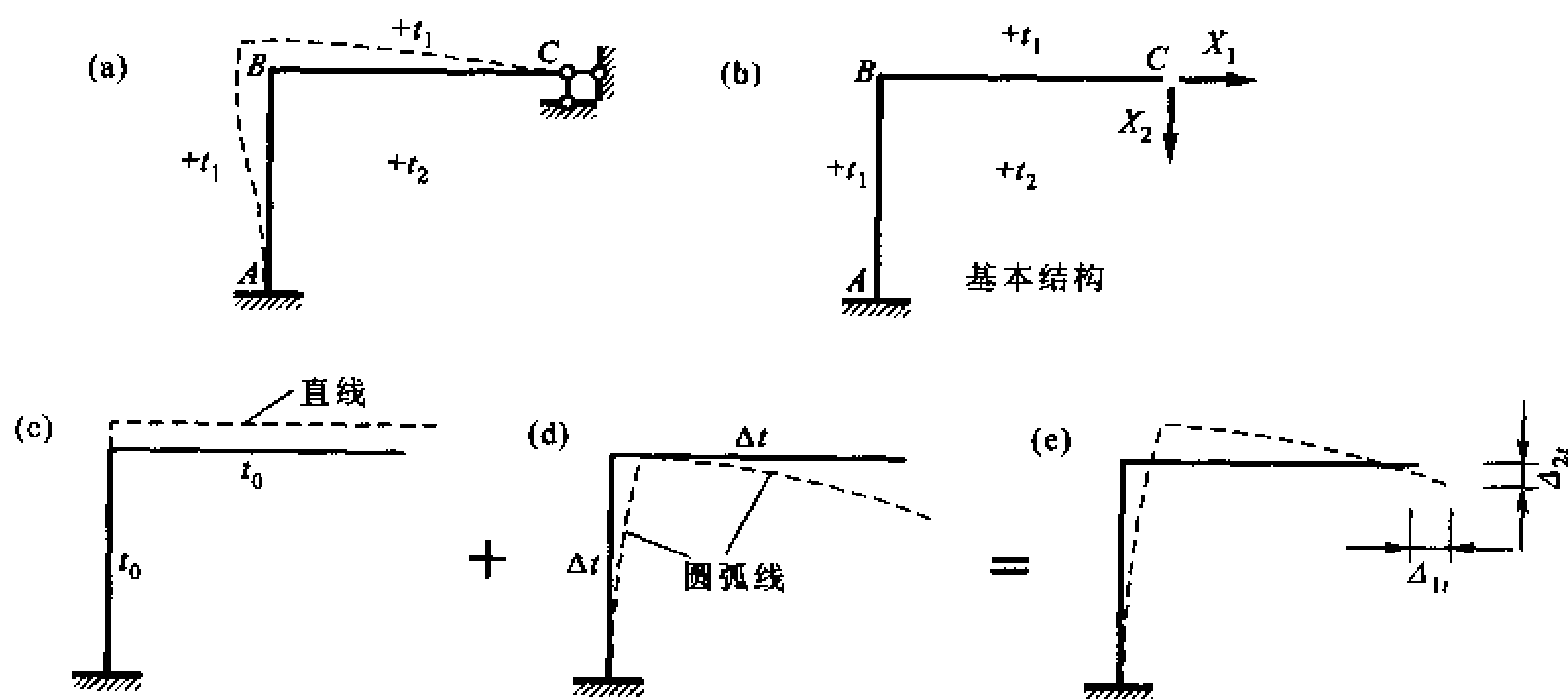


图 6-33

因为基本结构是静定的，非荷载因素的作用并不使其产生内力，故刚架的最终内力仅由多余约束力所引起。因此，由力法方程解出多余约束力后，刚架最终弯矩的算式为

$$M=\sum_{i=1}^{n}\overline{M}_iX_i \tag{6-7}$$

杆件的剪力和轴力也可同理计算。

例 6-11　试求图 6-34 所示结构因 AB 段温度均匀下降 t_0 引起的内力。设材料的线膨胀系数为 α。

解　图示结构是一次超静定的，切断 AB 杆，取基本结构如图 6-34b 所示。力法方程为

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1t}=0$$

它表示了切口两侧截面相对线位移为零的变形协调条件。方程的系数和自由项计算如下：

$$\delta_{11}=\frac{\overline{F}_{N1}^2}{EA}l+\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}ds=\frac{l}{EA}+\frac{h^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1t}=-\alpha t_0 l$$

Δ_{1t}的物理含义可见图6－34d。

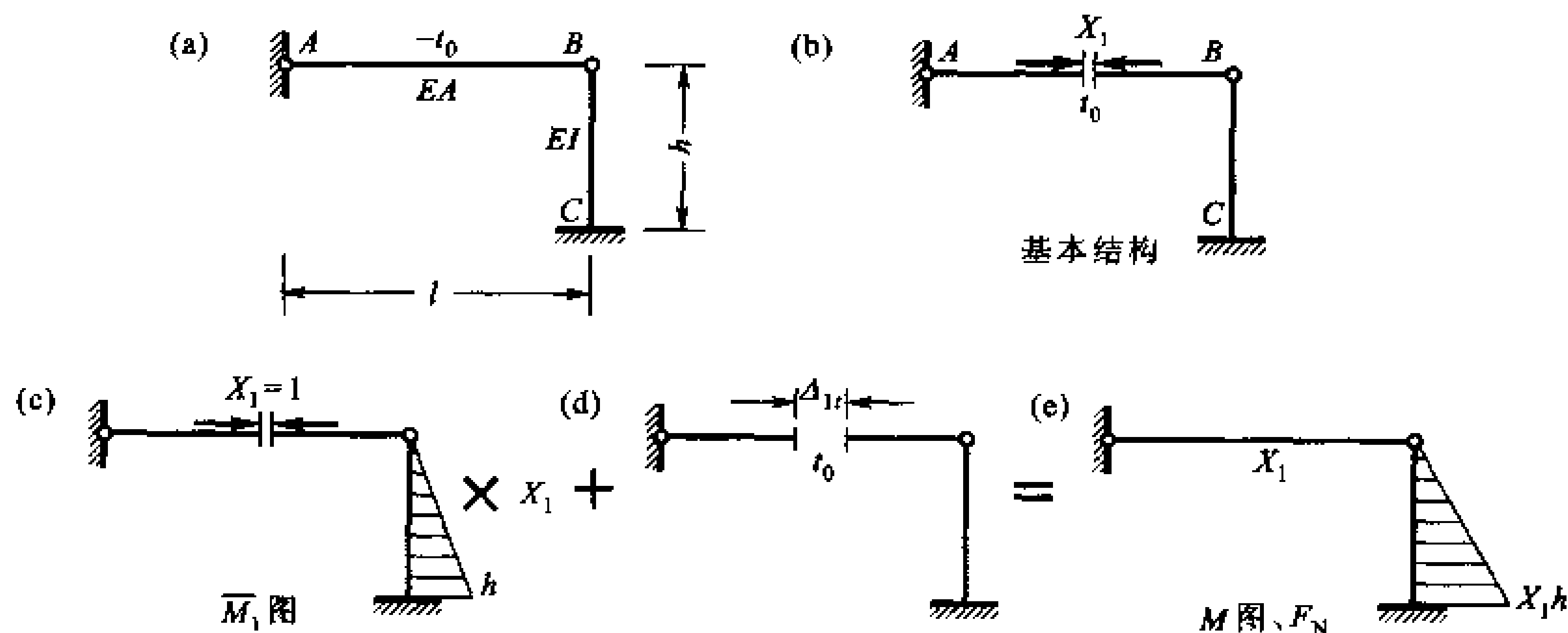


图　6－34

将以上系数和自由项代入力法方程，可解得

$$X_1=\frac{\alpha t_0}{\frac{1}{EA}+\frac{1}{l}\times\frac{h^3}{3EI}}=\frac{\alpha t_0}{\frac{1}{EA}+\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{k}}$$

式中$k=\frac{3EI}{h^3}$称为柱子的侧移刚度。结构的弯矩图和轴力如图6－34e所示。

例6－11的计算结果说明了以下力学和工程概念：

(1) 在温度变化作用下，超静定结构的内力与平均温度的变化值t_0以及材料的线膨胀系数α成正比。内力的数值还随受温度变化作用的AB杆截面刚度增大而增大。

(2) 柱子的侧移刚度k愈大，则AB杆中的轴力也愈大。若$k\to 0$，AB杆的轴力也趋于零，这说明温度变化作用下，杆件只有在变形受到约束的情况下才会产生内力；若$k\to\infty$，或者说AB杆两端受到刚性约束，则杆件轴力取得最大值$\alpha t_0 EA$，与杆件截面刚度成正比，而与杆件的长度无关；若k的值介于0～∞之间，则杆件的内力还将随受温度变化作用的AB杆长度的增大而增大。实际上，该例中的柱子侧移刚度k可以广义地理解为AB杆周边结构的约束刚度。用以上的定性分析结果可以解释许多因温度变化作用而产生的工程问题。

杆件制作误差、材料的收缩或徐变所引起超静定结构内力的计算，其基本原理与温度变化作用时相同。在例6－11中，可以将基本结构中AB杆因温度变化而产生的缩短量Δ_{1t}，代以AB杆制作长度的误差或材料的收缩量，就可以用同样的力法方程求得上述因素作用下结构的内力。由此也可以得出结论，周边的约束刚度对上述非荷载因素所引起的结构杆件内力有很大的影响。在同样的作用因素之下，混凝土结构的裂缝开展与上述相对刚度有着密切的关系。

§6-7 超静定结构的位移计算

作为变形体虚功原理应用的单位荷载法，不仅可用于计算静定结构的位移，也同样适用于计算超静定结构的位移。例如，欲求图 6-35a 所示均布荷载作用下两端固定梁跨中 C 点的挠度，应先作出荷载作用下梁的弯矩图，然后在 C 点作用单位竖向荷载，求出此虚拟平衡状态的弯矩如图 6-35d 所示，以下就可以用图乘法计算 C 点的竖向挠度。将半边梁的 M 图分解为一个矩形与一个标准抛物线形的叠加，其形心处对应 $\overline{M}$ 图的竖标分别为 0 和$\frac{l}{32}$，于是有

$$\Delta_C=\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s=0+\frac{2}{EI}\times\frac{2}{3}\times\frac{l}{2}\times\frac{ql^2}{8}\times\frac{l}{32}=\frac{ql^4}{384EI}$$

以上将虚拟的平衡状态建立在原结构上时，需另行计算在单位荷载作用下原超静定结构的内力，十分烦琐。那么是否有更便捷的计算方法呢？

在求解上述两端固定梁时，可以选取图 6-35b 的悬臂梁，或者图 6-35c 所示的简支梁作为基本结构，然后按照基本结构和原结构变形相同的原则建立力法方程，解出多余约束力。基本结构在上述多余约束力以及荷载共同作用下的内力和变形，与原结构是完全相同的。于是，就可以将超静定结构的位移计算问题，转化为相应静定结构的位移计算。或者说，可以将问题转化为计算图 6-35b 的悬臂梁或图 6-35c 的简支梁上 C 点的挠度。

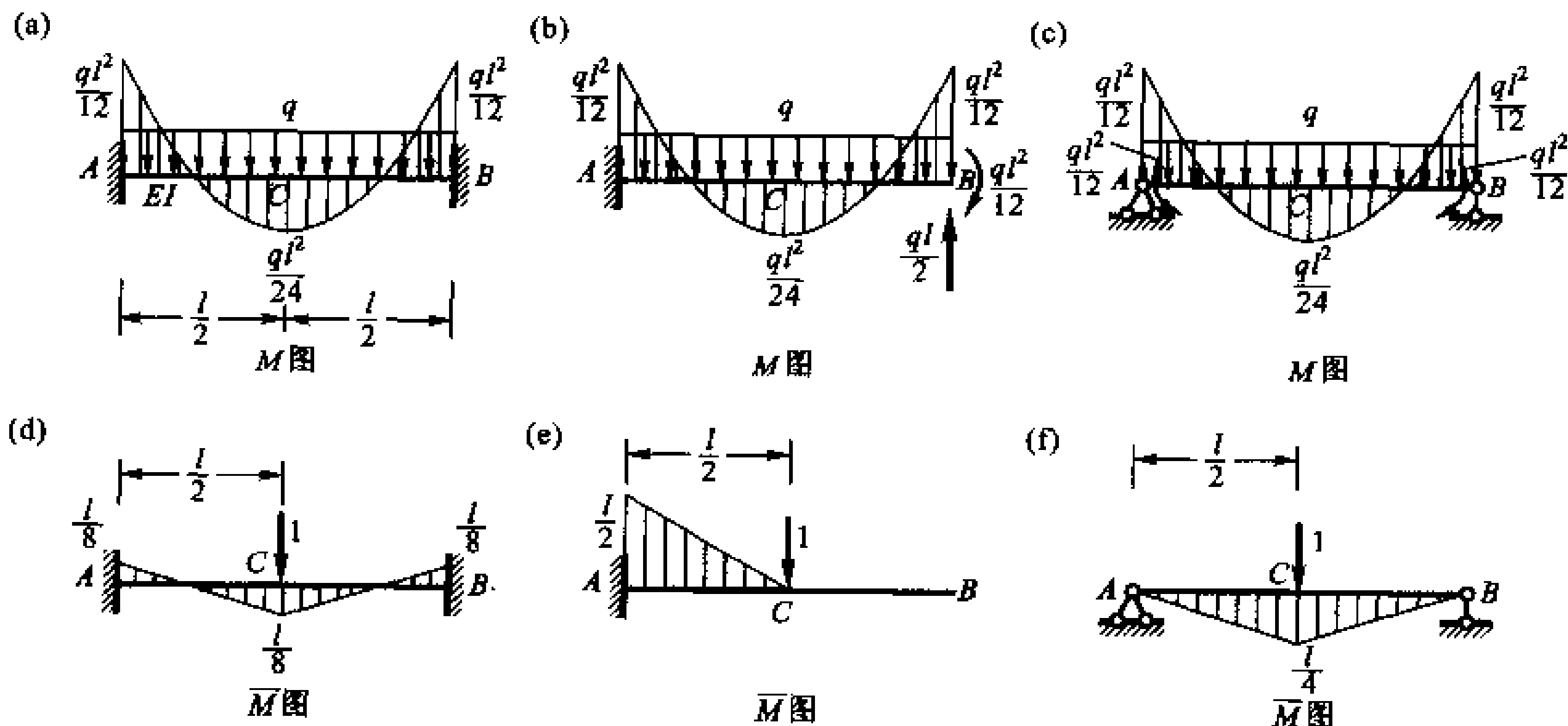


图 6-35

按照上述思路，只需在基本结构上建立虚拟的平衡状态，并求出单位荷载作用下的弯矩图 6-35e或 f，即可利用有关公式或图乘法计算出 C 点的挠度。以取图 6-35e 的虚拟状态为例，有

$$\Delta_C=\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}\mathrm{d}s=\frac{1}{EI}\left(\frac{l}{2}\times\frac{ql^2}{12}\times\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{l}{2}\times\frac{ql^2}{8}\times\frac{l}{2}\times\frac{3}{8}\right)=\frac{ql^2}{384EI}$$

与前计算结果相同。由于基本结构是静定的，在单位荷载作用下的内力易求得，因而位移计算就比较便捷。

例 6－12　试求图 6－36a 所示组合结构 C 点的竖向位移 Δ_C 和 AD 与 BD 杆间的相对转角 $\Delta_{\theta D}$。已知荷载作用下的内力如图 6－36b 所示，AD 和 BD 杆的轴向刚度 $EA=\frac{EI}{9}\ \mathrm{m}^{-2}$，忽略受弯杆件的轴向变形。

解　此为两次超静定的组合结构，力法求解取基本结构时可将 C 结点改为铰结（图 6－36c、d），或者将竖杆与铰 D 之间断开（图 6－36e、f）。

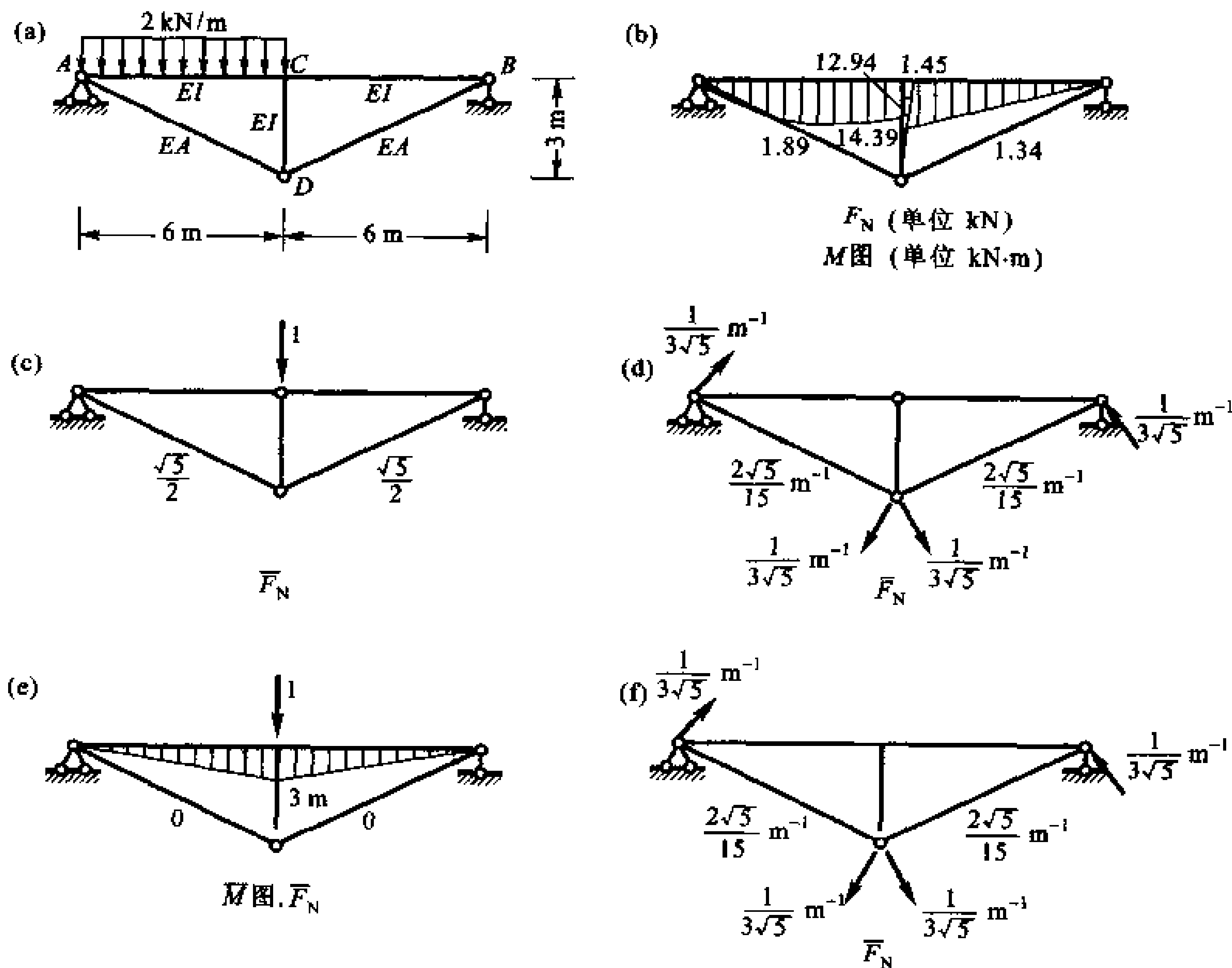


图　6－36

在计算位移时为避免再次求解两次超静定结构，取上述两种静定的基本结构建立虚拟状态，单位广义荷载及其产生的内力分别如图 6－36c、d 和 e、f 所示。

当采用图 6－36c 和 d 所示的虚拟状态时，在忽略原受弯杆件的轴向变形后，竖向位移 Δ_C 和 AD 与 BD 杆的相对转角 $\Delta_{\theta D}$ 分别计算如下：

$$\Delta_C=\sum\int\frac{\overline{F}_N F_P}{EA}\mathrm{d}s=\frac{3\sqrt{5}}{EA}\ \mathrm{m}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times(1.89\ \mathrm{kN}+1.34\ \mathrm{kN})=\frac{24.23}{EA}\ \mathrm{kN\cdot m}$$

$$\Delta_{\theta D}=\frac{3\sqrt{5}}{EA}\ \mathrm{m}\times\frac{2\sqrt{5}}{15}\ \mathrm{m}^{-1}\times(1.89\ \mathrm{kN}+1.34\ \mathrm{kN})=\frac{6.46}{EA}\ \mathrm{kN}$$

可见，在位移计算时仅用到原结构杆件的轴力数值。

当采用图 6－36e 所示的虚拟状态时，应用图乘法，并注意到 $EA=\frac{EI}{9}\ \mathrm{m}^{-2}$的关系，算得的 Δ_C 与前相同。此

时，在位移计算中仅用到原结构杆件的弯矩数值。图6－36f所示虚拟状态对应的 $\overline{F}_N$ 图与d图相同，且杆件的弯矩均为零，所求得的 $\Delta_{\theta D}$ 也必定相同。

超静定结构在支座位移、温度变化等非荷载因素作用下的位移计算，同样可以在其相应的静定结构上建立虚拟的平衡状态，从而将问题转化为静定结构的位移计算。忽略杆件剪切变形影响时，位移计算公式为

$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M}{EI}\mathrm{d}s+\sum\int\frac{\overline{F}_N F_N}{EA}\mathrm{d}s+\sum\int\overline{M}\,\frac{\alpha\Delta t}{h}\mathrm{d}s+\sum\int\overline{F}_N\alpha t_0\mathrm{d}s-\sum\overline{F}_R c \tag{6－8}$$

若是将虚拟的平衡状态建立在原结构上，则可以证明式(6－8)等号右边的前两项的值恒为零，位移计算公式可简化为

$$\Delta=\sum\int\overline{M}\,\frac{\alpha\Delta t}{h}\mathrm{d}s+\sum\int\overline{F}_N\alpha t_0\mathrm{d}s-\sum\overline{F}_R c \tag{6－9}$$

例6－13 试计算图6－37a所示梁在支座位移作用下 B 点的转角 θ_B。

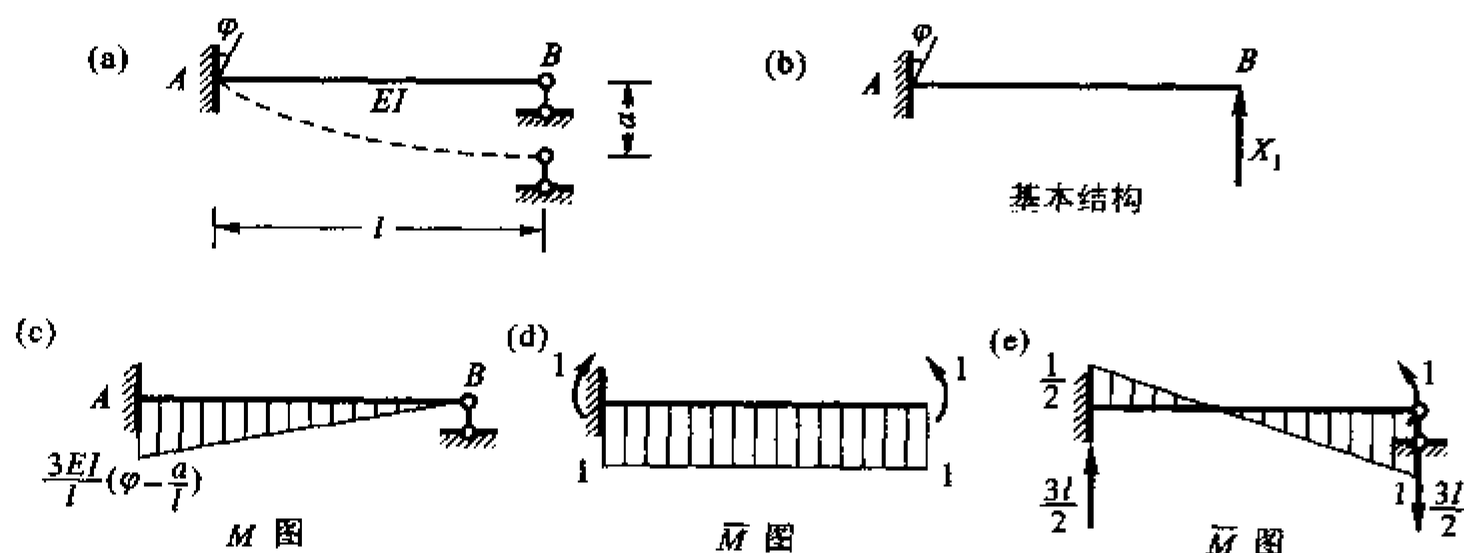


图 6－37

解 此梁为一次超静定，取基本结构如图6－37b，用力法可解得 B 支座的竖向反力

$$X_1=\frac{3EI}{l^2}\left(\varphi-\frac{a}{l}\right)$$

梁的弯矩可见于图6－37c。

求 B 点的转角时，若利用静定的基本结构建立虚拟平衡状态(图6－37d)，按式(6－8)，有

$$\begin{aligned}\theta_B&=\sum\int\frac{\overline{M}M}{EI}\mathrm{d}s-\sum\overline{F}_R c\\&=\frac{1}{EI}\times\frac{1}{2}\times l\times\frac{3EI}{l}\left(\varphi-\frac{a}{l}\right)\times1-1\times\varphi\\&=\frac{\varphi}{2}-\frac{3a}{2l}\end{aligned}$$

若将虚拟平衡状态建立在原结构上(图6－37e)，则可按式(6－9)，有

$$\theta_B=-\sum\overline{F}_R c=-\left(-\frac{1}{2}\varphi+\frac{3l}{2}\times a\right)=\frac{\varphi}{2}-\frac{3a}{2l}$$

可见，两种方法所得结果是相同的。

§6-8　超静定结构内力计算的校核

结构的内力是结构设计的依据，所以在计算求得内力后应该进行校核，以保证其正确性。从全局的角度讲，内力校核首先应检查结构的计算简图是否合理，原始数据是否正确，选用的参数是否恰当等。因为只有在计算简图、原始数据和所选用的参数都正确无误的前提下，结构的内力计算结果才是有意义的。

内力计算的校核还包括运用力学的基本概念，或者采用简化的估算方法，或者根据相关的工程经验对计算过程以及结果的合理性进行定性的分析判断。当以上各方面均无发现问题时，可以通过平衡条件和变形条件，对结构的内力计算和内力图形作进一步的定量校核。

6-8-1　平衡条件的校核

无论是静定还是超静定结构，内力(包括反力)必定满足静力平衡条件。当从结构上任意截取某一部分作为隔离体，平衡方程均应成立。通常可以取刚架结点为隔离体，检查是否满足力矩平衡条件；取横贯刚架各柱的截面以上部分为隔离体，检查是否满足水平投影方向力的平衡条件等。

图6-38a所示刚架的弯矩图已在例6-7中求得，如图6-38b所示。为校核其正确性，可截取 G、D、E 等结点作为隔离体(图6-38c、d、e)。以结点 D 为例，有

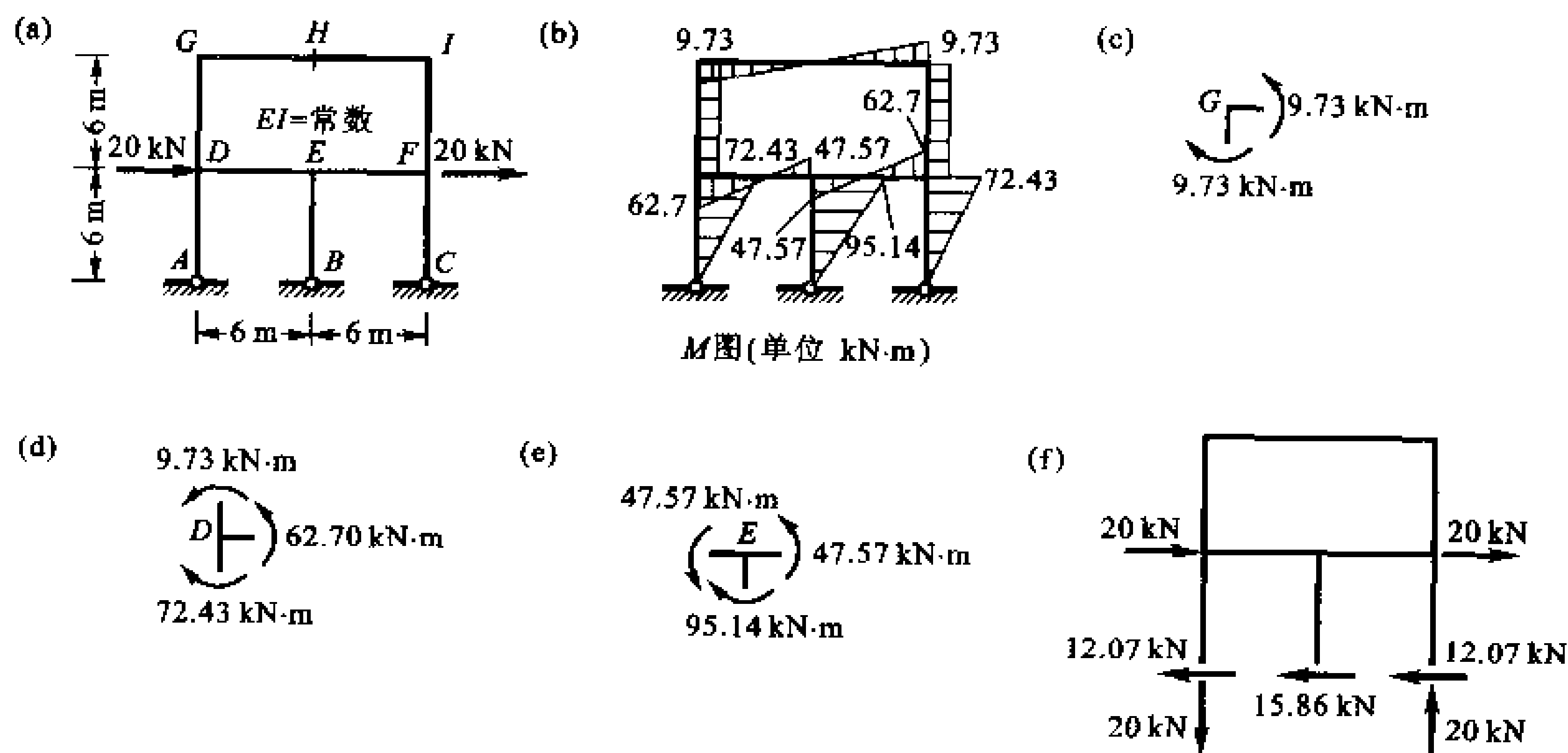


图　6-38

$$\sum M_D = 9.73\ \text{kN·m} + 62.70\ \text{kN·m} - 72.43\ \text{kN·m} = 0$$

满足结点力矩的平衡条件。

由刚架的弯矩图可求得各柱底剪力如图6-38f隔离体上所示，有

$$\sum F_x = 2\times 20\ \text{kN} - 2\times 12.07\ \text{kN} - 15.86\ \text{kN} = 0$$

可见,满足力的平衡条件。

校核结构隔离体的平衡条件时,一般只能选择其中的若干情况进行。此时,只要发现某一种情况下隔离体平衡条件不能满足,则说明内力计算存在错误。或者说,所选择的校核均满足隔离体平衡条件,是内力计算无误的必要条件。

对于超静定结构来说,满足平衡条件的内力有无穷多组。因为内力图是在多余约束力求得之后按平衡条件得出的,所以用平衡条件进行校核,只是对求得多余约束力之后运算正确性的判断有效,而不能判定多余约束力的数值正确与否。为此,还必须进行变形条件的校核。

6-8-2 变形条件的校核

由于多余约束力是根据变形条件求得的,故其计算是否有误,可以通过变形条件的校核来检查。前面已介绍,在计算超静定结构的位移时,虚拟的平衡状态可以建立在其对应的任意一个基本结构之上。对于图 6-38a 所示的刚架来说,可以取图 6-39a 所示的虚拟状态,计算检查 C 点的竖向位移是否为零;也可以分别取图 6-39b、c 所示的虚拟状态,计算检查横梁切口两侧的相对线位移和相对角位移是否为零。

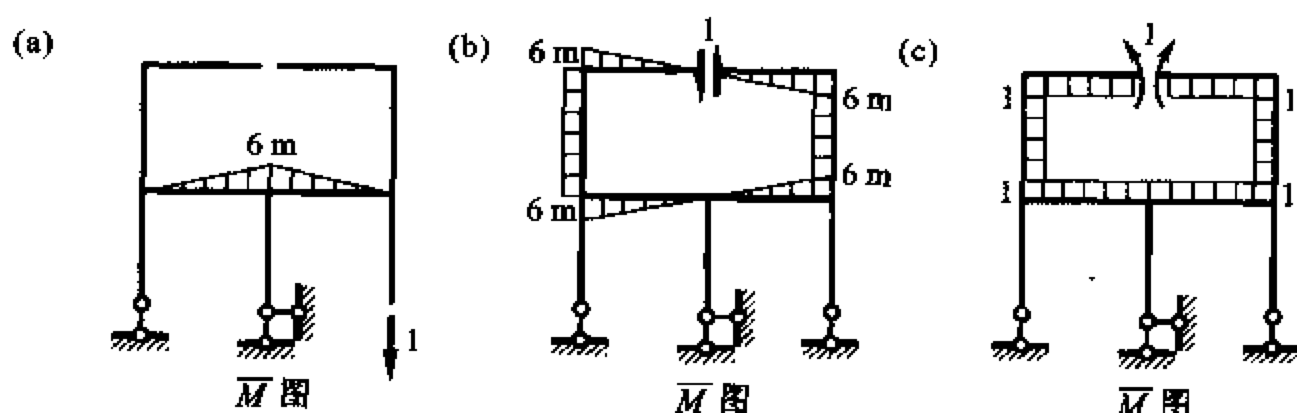


图 6-39

很明显,图 6-38b 与图 6-39 中任何一个单位弯矩图的图乘结果均为零,说明上述变形条件均能满足。值得指出的是,对于具有封闭框格的刚架,最为简捷的方法是利用封闭框格上任一截面的相对转角为零这一变形条件来进行弯矩图的校核。例如,取图 6-39c 进行变形条件校核。由于此时 $\overline{M}$ 图只在某一封闭框架上存在,且单位弯矩图竖标都等于 1,故利用图乘法计算上述相对转角时,相当于求同一封闭框格上 M 图的面积除以杆件截面弯曲刚度后的代数和。当仅有荷载作用时,变形条件可以写为

$$\sum\int\frac{\overline{M}M}{EI}\mathrm{d}s=\sum\int\frac{M}{EI}\mathrm{d}s=\sum\frac{A_M}{EI}=0$$

式中 A_M 表示 M 图的面积,可以规定它位于框格内侧或外侧时为正。这表明在任何封闭无铰框格上,弯矩图的面积除以相应杆件的截面弯曲刚度后的代数和应等于零。

与平衡条件的校核一样,所选择的校核均满足变形条件,是超静定结构内力计算无误的必要条件。

§6-9 超静定拱

土木工程中常用的拱结构除静定的三铰拱外，还有两铰拱和无铰拱。如桥梁中的拱桥，有单跨拱(图6-40a)和多跨连续拱；跨越河流或道路的拱形输液管道；地下建筑和水利工程中的隧洞衬砌拱圈(图6-40b、c)；道路工程中的涵洞；房屋建筑中的拱形屋架(图6-40d)等。

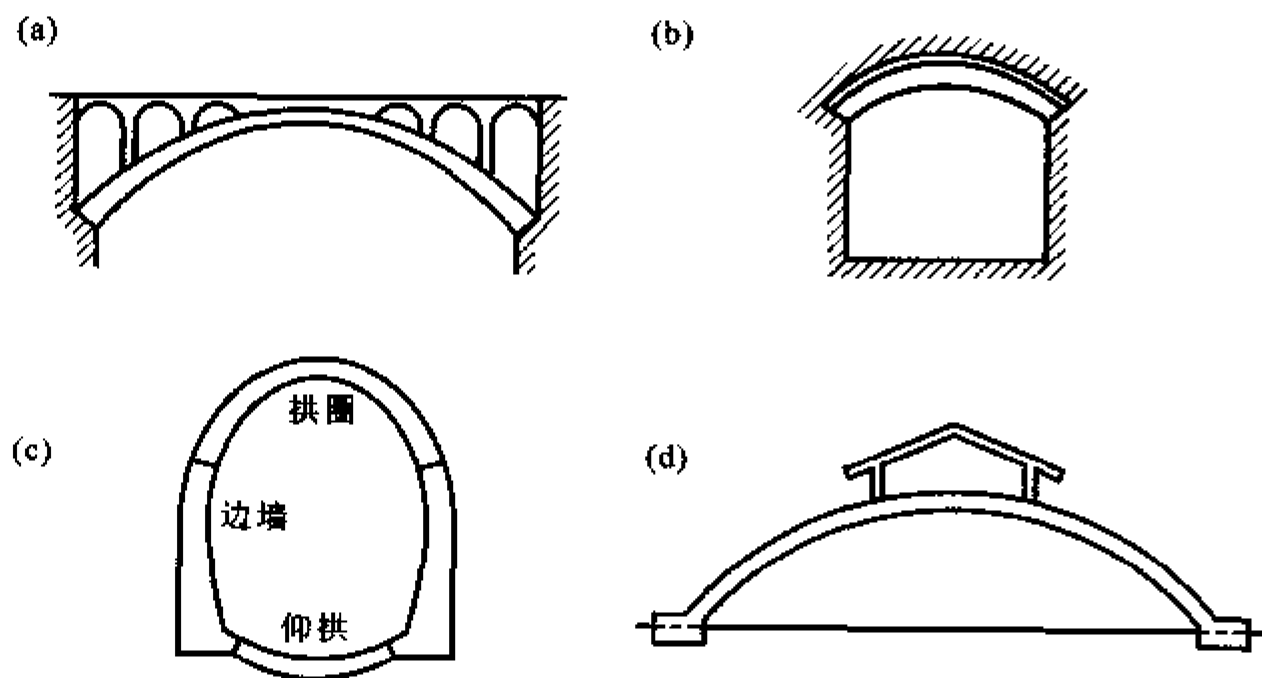


图 6-40

无铰拱属三次超静定结构。由于支座水平推力的存在，一般无铰拱的截面弯矩从拱趾向拱顶逐渐减小，因而截面也常设计成拱趾向拱顶逐渐减小，这样受力就比较均匀。无铰拱因构造简单，工程中应用较多。两铰拱是一次超静定结构，两铰平拱的支座发生竖向位移时，不会使拱体产生附加内力，故在地基可能产生较大的不均匀沉降时宜选用。两铰拱的弯矩在两端拱趾处为零，而逐渐向拱顶增大，所以其截面一般设计成由拱趾向拱顶逐渐增大的形式。超静定拱作为屋盖时常用带拉杆的两铰拱(图6-40d)，此时竖向荷载作用下支座处的水平推力将由拉杆承受，因而可以减小或消除推力对其支撑结构产生不利影响。

6-9-1 两铰拱的力法计算

图6-41a所示为两铰拱受任意荷载作用，可选取与其相应的简支曲梁为基本结构(图6-41b)，将支座处的水平推力作为力法的基本未知量。根据原结构在支座处水平线位移为零的变形协调条件，可建立力法方程为

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0$$

分析超静定拱时仍可取拱轴力受压为正，弯矩以拱内缘受拉为正。基本结构在单位约束力$X_1=1$作用下的支座竖向反力为零，按照图示坐标系由平衡条件可列出任一截面处的内力为

$$\overline{M}_1=-y,\quad \overline{F}_{Q1}=-\sin\varphi,\quad \overline{F}_{N1}=\cos\varphi$$

式中y为任意截面处的纵坐标，φ为任意截面处拱轴切线与水平轴的夹角。

值得说明的是：

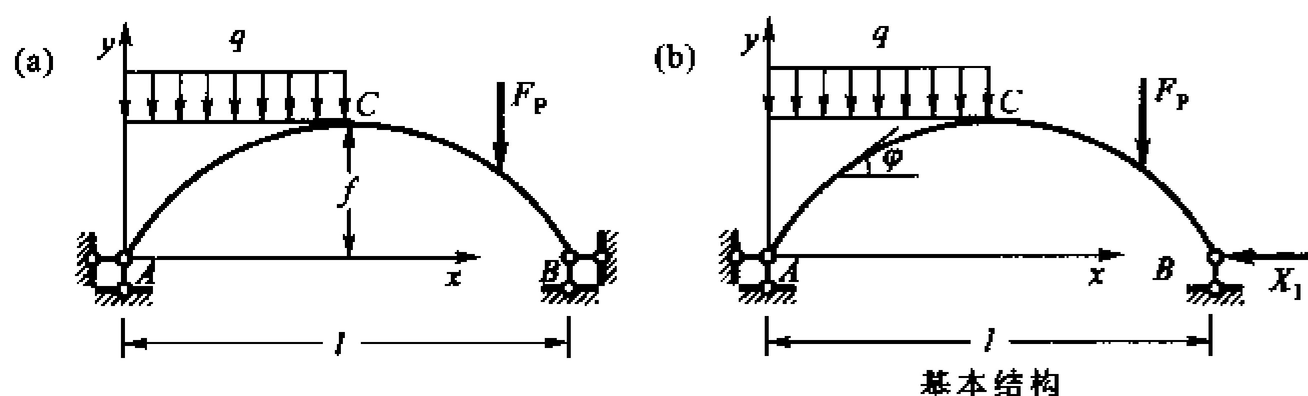


图 6－41

(1) 因拱轴线是曲线，力法方程中系数 δ_{11} 与自由项 Δ_{1P} 的计算不能采用图乘法，而必须采用积分的方法。当拱轴线的曲率半径与杆件截面高度之比 $R/h>5$ 时，一般可以忽略拱轴曲率的影响，按直杆的位移公式计算上述位移。

(2) 根据分析不同尺寸的两铰拱所积累的经验表明，常用的两铰拱拱顶截面高度 $h_C<l/10$，计算系数 δ_{11} 时可以忽略剪切变形的影响；若拱矢高 $f>l/5$ 则轴向变形也可以忽略；但对于扁平拱($f<l/5$)，则必须同时考虑弯曲变形和轴向变形的影响。计算自由项 Δ_{1P} 时，一般可以忽略轴向变形和剪切变形的影响。因此，有

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}&=\int\frac{\overline{M}_1^2}{EI}\mathrm{d}s+\int\frac{\overline{F}_{N1}^2}{EA}\mathrm{d}s=\int\frac{y^2}{EI}\mathrm{d}s+\int\frac{\cos^2\varphi}{EA}\mathrm{d}s\\\Delta_{1P}&=\int\frac{\overline{M}_1M_P}{EI}\mathrm{d}s=-\int\frac{yM_P}{EI}\mathrm{d}s\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

代入力法方程，可以求得两铰拱支座的水平推力为

$$F_H=X_1=-\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}=\frac{\int\frac{yM_P}{EI}\mathrm{d}s}{\int\frac{y^2}{EI}\mathrm{d}s+\int\frac{\cos^2\varphi}{EA}\mathrm{d}s}\tag{6-10}$$

只要给定拱轴线方程 $y(x)$，已知拱横截面面积 $A(x)$ 和惯性矩 $I(x)$ 的变化规律，就可以根据上式求得支座处的水平推力 F_H，并进而求得两铰拱轴任意截面处的内力如下：

$$\left.\begin{aligned}M&=M_P+\overline{M}_1X_1=M_P-F_Hy\\F_Q&=F_{QP}+\overline{F}_{Q1}X_1=F_{QP}-F_H\sin\varphi\\F_N&=F_{NP}+\overline{F}_{N1}X_1=F_{NP}+F_H\cos\varphi\end{aligned}\right\}\tag{6-11a}$$

如果两铰拱只受竖向荷载，则上式中荷载作用下基本结构的内力可用相同跨度、相同荷载下的简支梁相应截面的内力 M^0 和 F_Q^0 来表达，即

$$M_P=M^0,\quad F_{QP}=F_Q^0\cos\varphi,\quad F_{NP}=F_Q^0\sin\varphi\tag{6-11b}$$

将式(6－11b)代入式(6－11a)可以发现，竖向荷载作用下两铰拱的内力计算公式与三铰拱完全相同，只是两铰拱的水平推力 F_H 须由变形条件来确定，而三铰拱的水平推力按静力平衡条件即可求得。

对于带拉杆的两铰拱(图 6－42a)，可以取切断拉杆后的简支曲梁作为基本结构，以拉杆内力 X_1^* (F_H^*)作为力法方程的基本未知量(图 6－42b)。根据拉杆断口两侧相对线位移等于零的

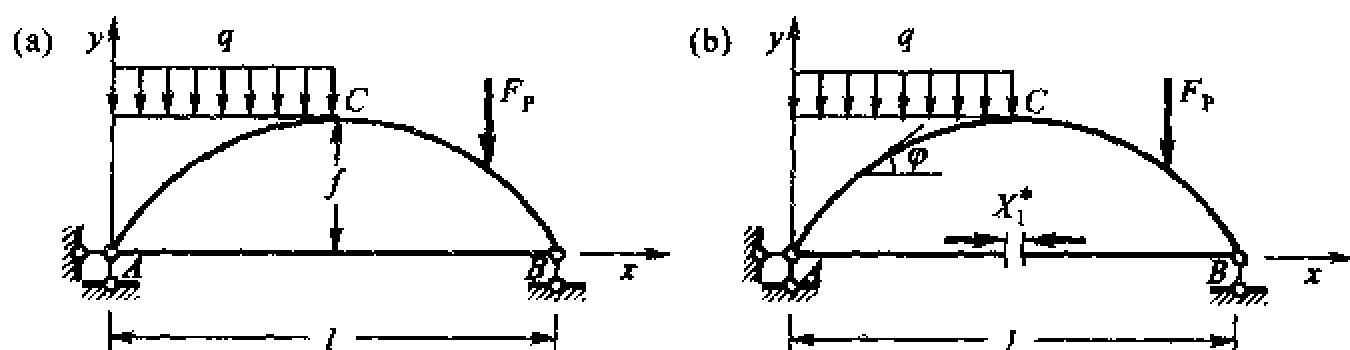


图 6-42

变形协调条件，可建立力法方程 $\delta_{11}^* X_1^* + \Delta_{1P}^* = 0$，其形式与无拉杆的两铰拱时相同。基本结构在荷载作用下拉杆的轴力为零，因此方程中自由项 Δ_{1P}^* 的计算式与无拉杆时相同，而系数 δ_{11}^* 计算时应当考虑拉杆轴向变形的影响，故有

$$F_H^* = X_1^* = -\frac{\Delta_{1P}^*}{\delta_{11}^*} = \frac{\int \frac{yM_P}{EI}ds}{\int \frac{y^2}{EI}ds + \int \frac{\cos^2\varphi}{EA}ds + \frac{l}{E_1A_1}} = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11} + \frac{l}{E_1A_1}} \tag{6-12}$$

式中 E_1A_1 为拉杆的截面轴向刚度；l 为拉杆的长度。由上式可以看出：

(1) 拉杆的轴力一般比相应的无拉杆两铰拱的支座水平推力小。

(2) 拉杆的截面轴向刚度 $E_1A_1 \to \infty$ 时，有 $F_H^* = F_H$，其受力状态将同无拉杆的两铰拱。

(3) $E_1A_1 \to 0$ 时，拉杆拱变成简支曲梁而丧失拱的特征。因此，设计拉杆拱时应适当加大拉杆的轴向刚度，以减小拱体内的弯矩。

6-9-2　无铰拱的力法计算

1. 弹性中心法

图 6-43a 所示为一对称无铰拱，分析时可利用结构的对称性，在拱顶 C 处截开，取对称的两悬臂曲梁为基本结构(图 6-43b)，以拱顶截面 C 处的轴力 X_1、剪力 X_2 和弯矩 X_3 作为基本未知量，可以建立其力法方程。由于 X_1、X_3 是对称未知力，X_2 是反对称未知力，因此力法方程的副系数 $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$，$\delta_{23} = \delta_{32} = 0$。于是，力法方程可分为独立的两组

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0\\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0\\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

若能使式(b)中副系数 $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$，则力法方程将简化为三个相互独立的方程式，内力计算会更加简便。为此，可设想将作用在拱顶截面上单位未知力的作用点上下平行移动。此时，$X_2 = 1$ 和 $X_3 = 1$ 所引起的单位弯矩图形不会发生改变，其中 $\overline{M}_3$ 图为拱内缘受拉的等值弯矩图；$X_1 = 1$ 所引起的 $\overline{M}_1$ 图原为全拱内缘受拉且 C 截面处弯矩为零，上移或下移后的 $\overline{M}_1$ 图分别如图 6-43c、d 所示。可见，欲使 $\delta_{13} = 0$，则 $X_1 = 1$ 应下移。

基于上述考虑，可设想将无铰拱在拱顶 C 处沿对称轴切开后，在断口两边接上两根长度为

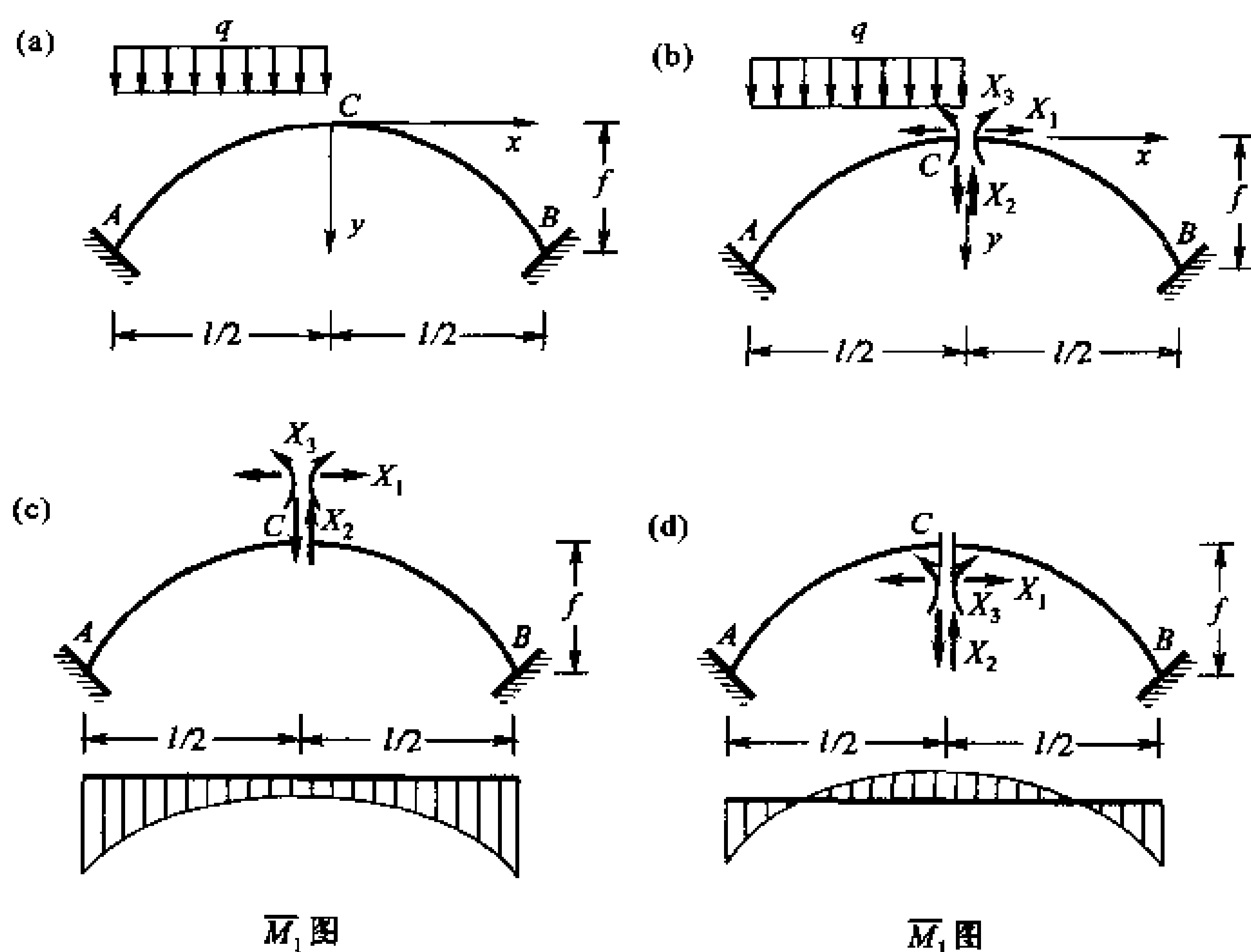


图　6-43

$\bar{y}$ 且刚度为无穷大的刚臂,并将刚臂下端 O 处刚结,如图 6-44a 所示。由于刚臂本身不变形,在任意荷载作用下,切口 C 左右截面之间不会发生任何相对位移(包括相对线位移和相对转角)。这样,带刚臂的无铰拱与原无铰拱完全等效,可以互相替代。

将带刚臂的无铰拱在刚臂下端 O 处切开,以对称的两个带刚臂的悬臂曲梁为基本结构(图 6-44b),取切口处的水平力 X_1、竖向力 X_2 和弯矩 X_3 为基本未知量,由 O 点处相对位移为零的变形协调条件可以建立力法方程同式(b)。

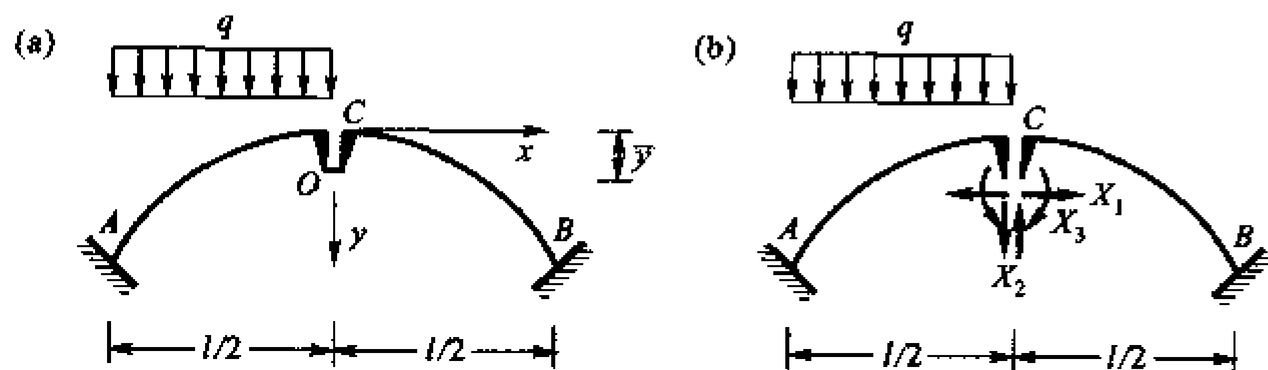


图　6-44

在 $X_1=1$、$X_2=1$ 和 $X_3=1$ 分别作用下的单位弯矩分别为

$$\left.\begin{aligned}&\overline{M}_1=y-\bar{y},\quad \overline{F}_{N1}=\cos\varphi,\quad \overline{F}_{Q1}=\sin\varphi\\&\overline{M}_2=x,\quad \overline{F}_{N2}=-\sin\varphi,\quad \overline{F}_{Q2}=\cos\varphi\\&\overline{M}_3=1,\quad \overline{F}_{N3}=0,\quad \overline{F}_{Q3}=0\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

令

$$\delta_{13}=\int\frac{\overline{M}_1\overline{M}_3}{EI}ds=\int\frac{(y-\bar{y})\times 1}{EI}ds=\int\frac{y}{EI}ds-\bar{y}\int\frac{1}{EI}ds=0$$

则可以求得刚臂的长度为

$$\bar{y}=\frac{\int\frac{y}{EI}ds}{\int\frac{1}{EI}ds} \tag{6-13}$$

当已知拱轴方程和拱横截面惯性矩变化规律时，刚臂长度即刚臂端点 O 的位置就可由上式确定，此时作用在 O 点切口左右的三对未知力之间的副系数将全为零。点 O 即称为无铰拱的弹性中心，它的位置取决于结构本身的几何参数和物理特性。设想沿拱轴曲线作出宽度为 $1/EI$ 的带状图形如图 6－45 所示，$\frac{ds}{EI}$就代表此图中的微面积，而式(6－13)就是该图形心坐标的计算公式。由于该平面图形的面积与结构的弹性性质 EI 有关，故称它为弹性面积，刚臂的端点即该平面图形的形心则称为弹性中心。

因此，对称无铰拱的求解可先由式(6－13)确定弹性中心的位置；然后取对称的两个带刚臂的悬臂曲梁为基本结构，刚臂下端即为弹性中心，以刚臂端点的水平力、竖向力和弯矩作为基本未知量；最后按力法方程求解基本未知量。这种方法称为弹性中心法。此时，力法方程简化为

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0\\ \delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0\end{aligned}\right\} \tag{6-14}$$

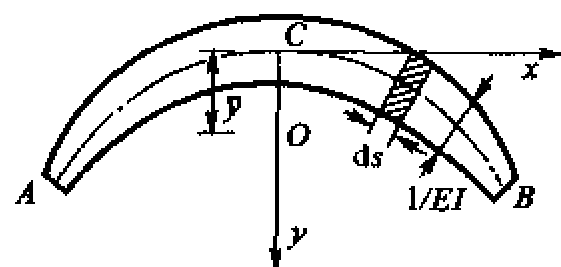


图 6－45

式中主系数和自由项的计算一般仍可采用直杆位移计算公式，即

$$\left.\begin{aligned}\delta_{ii}&=\int\frac{\overline{M}_i^2}{EI}ds+\int\frac{\overline{F}_{Ni}^2}{EA}ds+\int\frac{k\overline{F}_{Qi}^2}{GA}ds\\ \Delta_{iP}&=\int\frac{\overline{M}_iM_P}{EI}ds+\int\frac{\overline{F}_{Ni}F_{NP}}{EA}ds+\int\frac{k\overline{F}_{Qi}F_{QP}}{GA}ds\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

计算时通常可只考虑弯曲变形的影响，但少数情况下仍需考虑剪切变形和轴向变形的影响，可根据结构实际情况参考表 6－4 确定。

表 6－4 计算系数和自由项时需考虑的影响

f	h_C	δ_{11}	δ_{22}	Δ_{1P}、Δ_{2P}	δ_{33}、Δ_{3P}
$f<l/5$	—	M、F_N	M	M	M ($\overline{F}_{N3}=\overline{F}_{Q3}=0$)
$f>l/5$	$h_C>l/10$	M、F_N、F_Q	M		
	$h_C<l/10$	M			

求解力法方程得弹性中心处的三个未知约束力之后，即可以由隔离体的平衡条件求得任意截面的内力。

2. 温度变化和支座位移作用下无铰拱的计算

无铰拱在温度变化和支座位移作用下将会产生明显的内力，一般不容忽视。如图 6-46a 所示对称无铰拱，设拱的外缘温度升高 t_1，内缘温度升高 t_2。力法计算时仍采用弹性中心法，基本结构如图 6-46b。由于温度变化情况对称于 y 轴，因此有 $X_2=0$，力法方程简化为

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\Delta_{1t}=0\\ \delta_{33}X_3+\Delta_{3t}=0\end{aligned}\right\} \tag{6-15}$$

式中主系数的计算同前，自由项为

$$\Delta_{it}=\int \overline{M}_i\frac{\alpha\Delta t}{h}\mathrm{d}s+\int \overline{F}_{\mathrm{N}i}\alpha t_0\mathrm{d}s \tag{e}$$

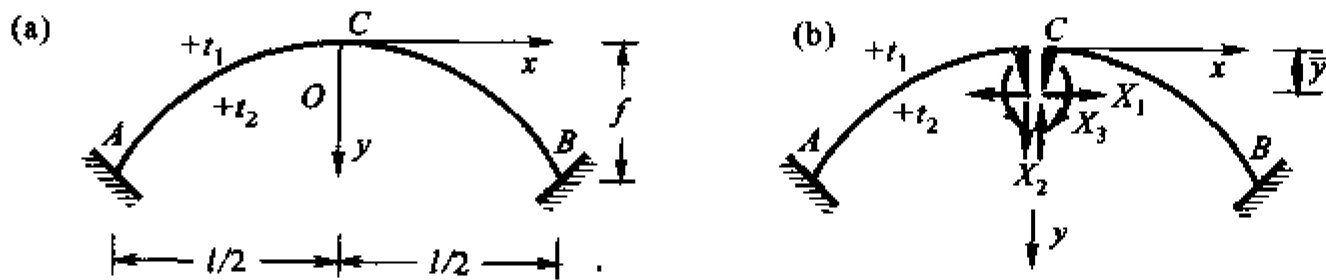


图 6-46

于是，可求得弹性中心处的未知约束力为

$$\left.\begin{aligned}X_1&=-\frac{\left(\alpha\Delta t\int\frac{(y-\bar{y})}{h}\mathrm{d}s-\alpha t_0 l\right)}{\int\frac{(y-\bar{y})^2}{EI}\mathrm{d}s+\int\frac{\cos^2\varphi}{EA}\mathrm{d}s}\\ X_3&=-\frac{\alpha\Delta t\int\frac{\mathrm{d}s}{h}}{\int\frac{\mathrm{d}s}{EI}}\end{aligned}\right\} \tag{6-16}$$

求得未知约束力后，即可按叠加原理求得拱上任意截面处的内力：

$$\left.\begin{aligned}M&=(y-\bar{y})X_1+X_3\\ F_N&=X_1\cos\varphi\\ F_Q&=-X_1\sin\varphi\end{aligned}\right\}$$

若 $t_1=t_2=t_0$，即拱的内、外缘温度变化相同，则 $\Delta t=0$，有 $X_3=0$。这表明当全拱温度均匀改变时，在弹性中心处只产生水平未知力 X_1，升温时为压力，降温时为拉力。若拱轴为二次抛物线且 $I=\frac{I_C}{\cos\varphi}$，$A=\frac{A_C}{\cos\varphi}$，则此时 $X_1=\frac{45\alpha t_0}{4(1+\mu)f^2}EI_C$，其中 $\mu=\frac{45}{16}\frac{I_C l}{A_C f^3}\tan^{-1}\frac{4f}{l}$从中可以看出拱愈平坦或刚度愈大，温度改变引起的拱中弯矩愈大。

混凝土的收缩对超静定结构的影响与温度均匀下降的情况相似,故可用温度均匀变化的计算方式来处理。混凝土的温度线膨胀系数为 $\alpha = 1\times10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$,而一般混凝土的收缩率约为0.025%,相当于温度均匀下降25℃。若拱体的混凝土不是一次浇成而是分段分期浇筑的,则其收缩的影响通常相当于温度下降10～15℃。

支座位移也将使无铰拱产生内力。如图6-47a所示的对称无铰拱,设支座A发生水平位移a、竖向位移b和转角位移θ。现仍用弹性中心法(图6-47b)计算,其力法方程为

$$\left.\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\Delta_{1c}=0\\ \delta_{22}X_2+\Delta_{2c}=0\\ \delta_{33}X_3+\Delta_{3c}=0\end{aligned}\right\}\tag{6-17}$$

其中主系数仍按式(d)计算;自由项按 $\Delta_{ic} = -\sum \bar{F}_R c$ 计算,有

$$\Delta_{1c}=a+(f-\bar{y})\theta,\quad \Delta_{2c}=b-\frac{l\theta}{2},\quad \Delta_{3c}=\theta \tag{f}$$

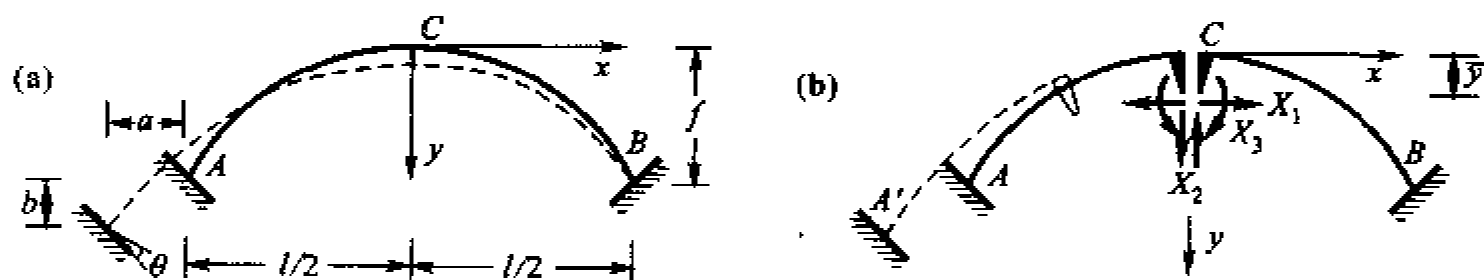


图　6-47

将式(f)代入力法方程,可以求得未知约束力:

$$\left.\begin{aligned}X_1&=-\frac{\Delta_{1c}}{\delta_{11}}=-\frac{a+(f-\bar{y})\theta}{\int\frac{y^2}{EI}\mathrm{d}s+\int\frac{\cos^2\varphi}{EA}\mathrm{d}s}\\ X_2&=-\frac{\Delta_{2c}}{\delta_{22}}=-\frac{b-l\theta/2}{\int\frac{x^2}{EI}\mathrm{d}s}\\ X_3&=-\frac{\Delta_{3c}}{\delta_{33}}=-\frac{\theta}{\int\frac{\mathrm{d}s}{EI}}\end{aligned}\right\}\tag{6-18}$$

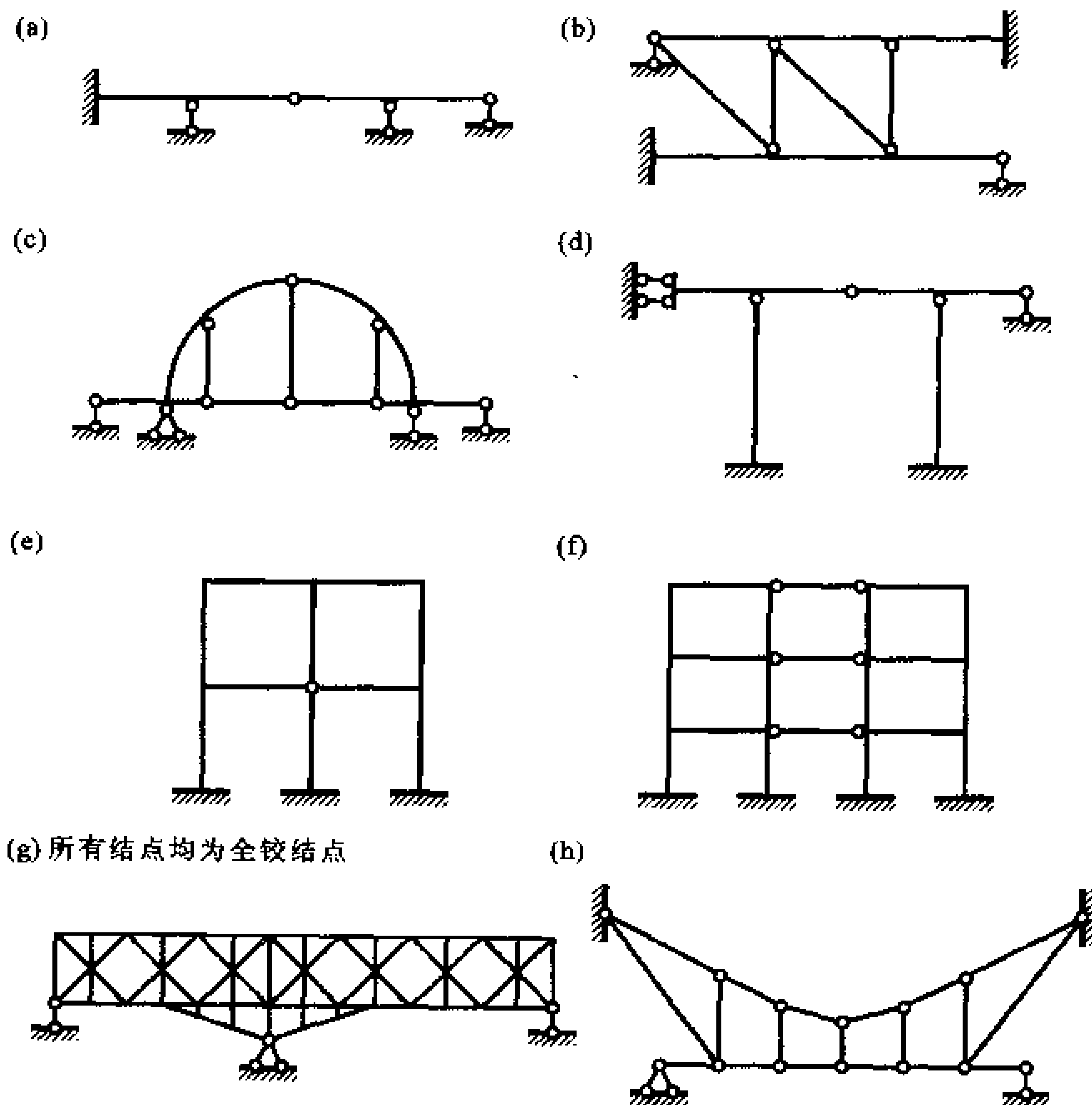
其余内力便不难按叠加法求得。由上式6-18可以看出:截面刚度EI、EA愈大,则由支座移动产生的内力就愈大。与两铰拱不同,即使只有竖向位移作用,也会在无铰拱内产生内力,因此在地基不良的情况下应避免使用。

习　题

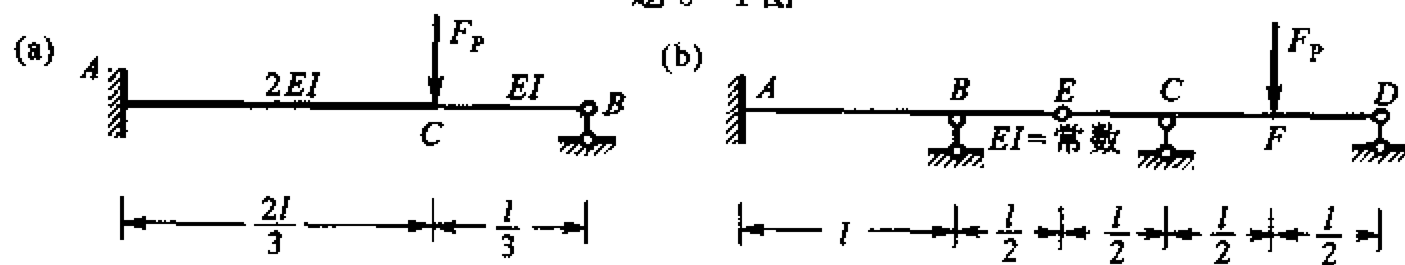
6-1　试确定图示结构的超静定次数。

6-2　结构的超静定次数与力法基本结构的选取是否有关？力法方程有何物理意义？

6-3　试用力法计算图示超静定梁,并绘出M、F_Q图。

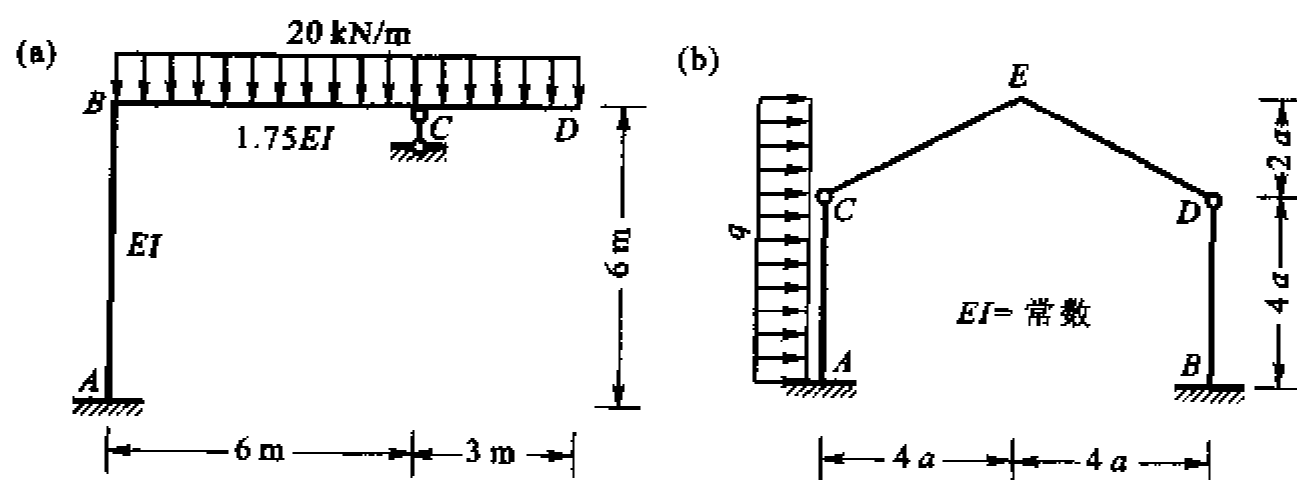


题 6－1 图



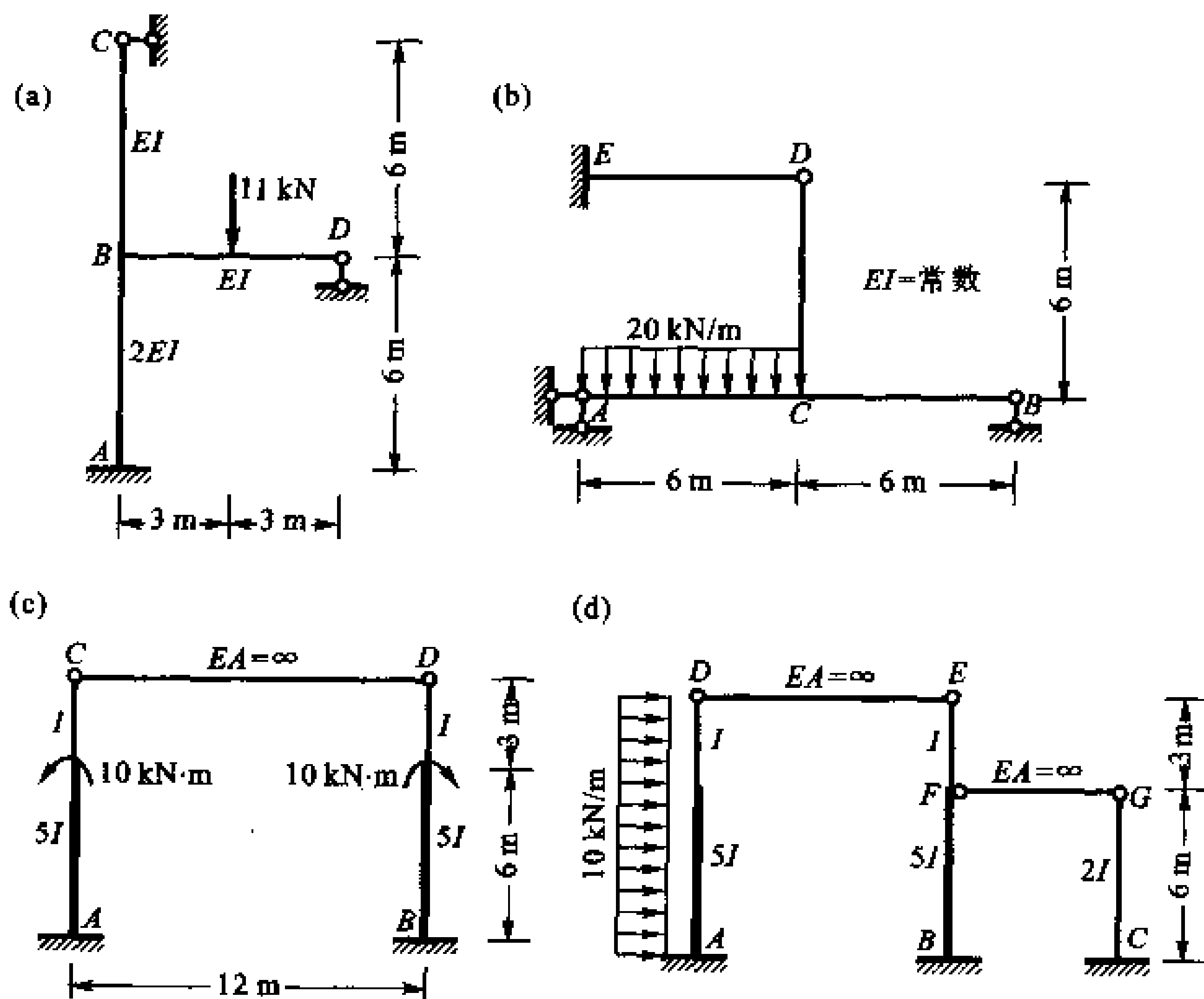
题 6－3 图

6－4　试用力法计算图示结构，并绘其内力图。



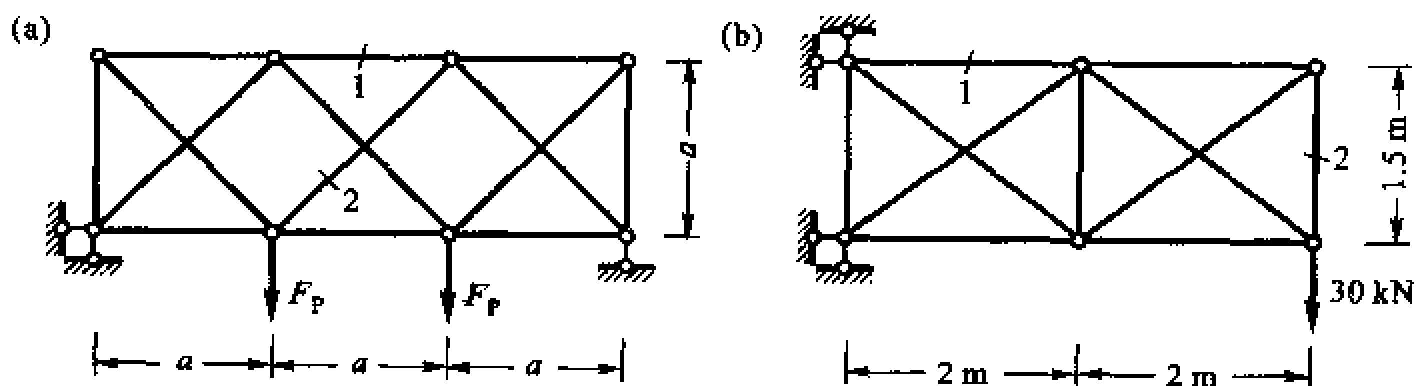
题 6－4 图

6－5　试用力法计算图示结构，并绘出 M 图。



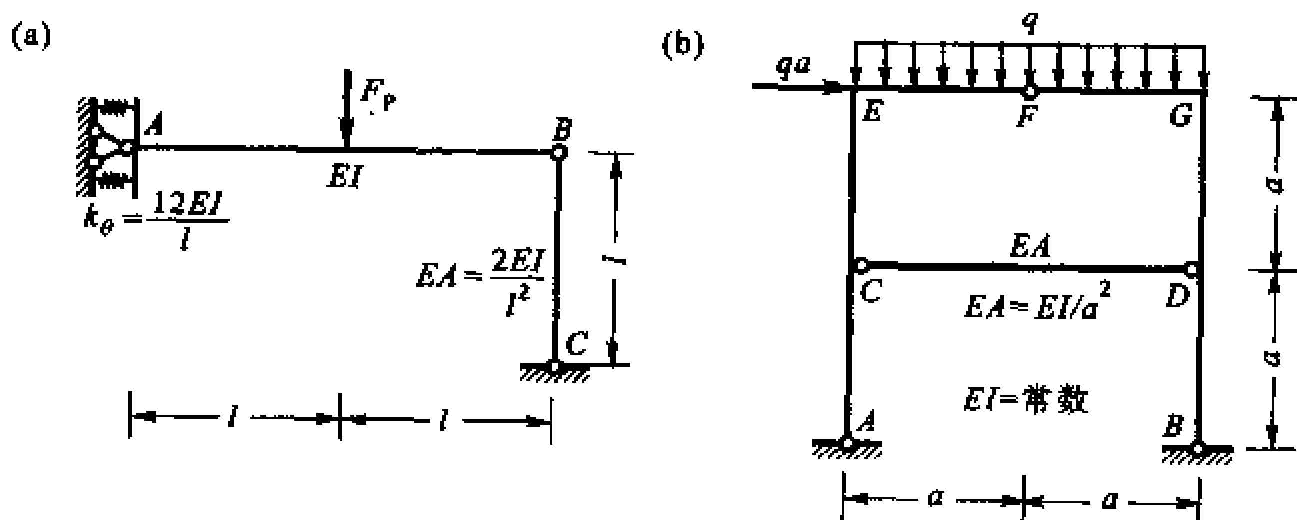
题6－5图

6－6　试用力法求解图示超静定桁架，并计算1、2杆的内力。设各杆的 EA 均相同。



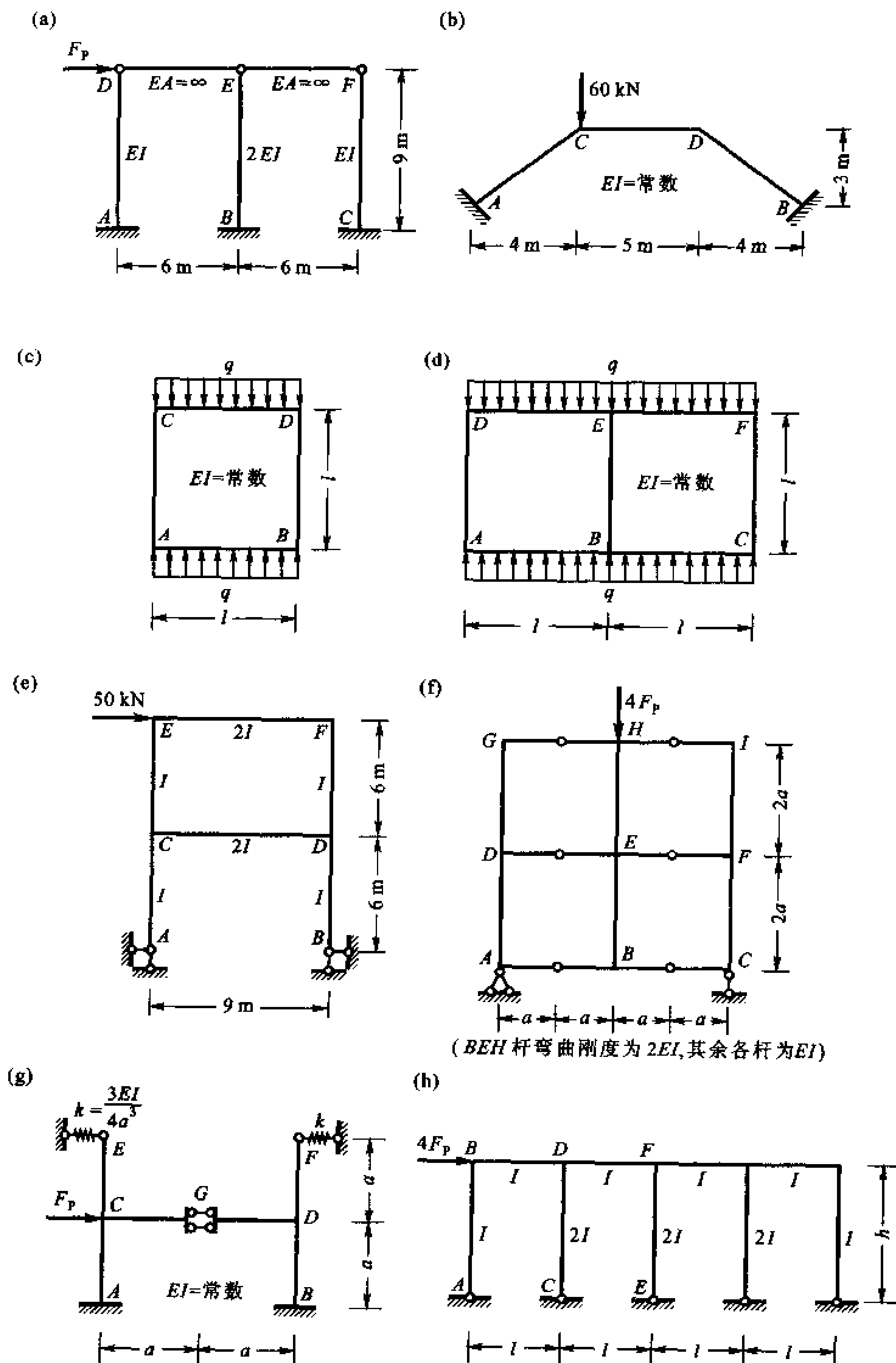
题6－6图

6－7　试用力法计算图示组合结构，求出链杆轴力并绘出 M 图。



题6－7图

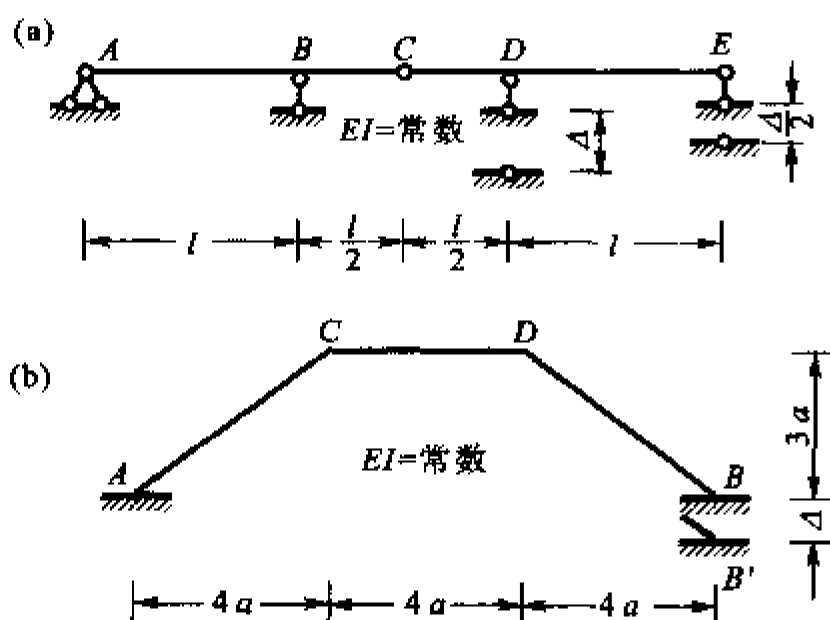
6-8　试利用对称性计算图示结构,并绘出 M 图。



题 6-8 图

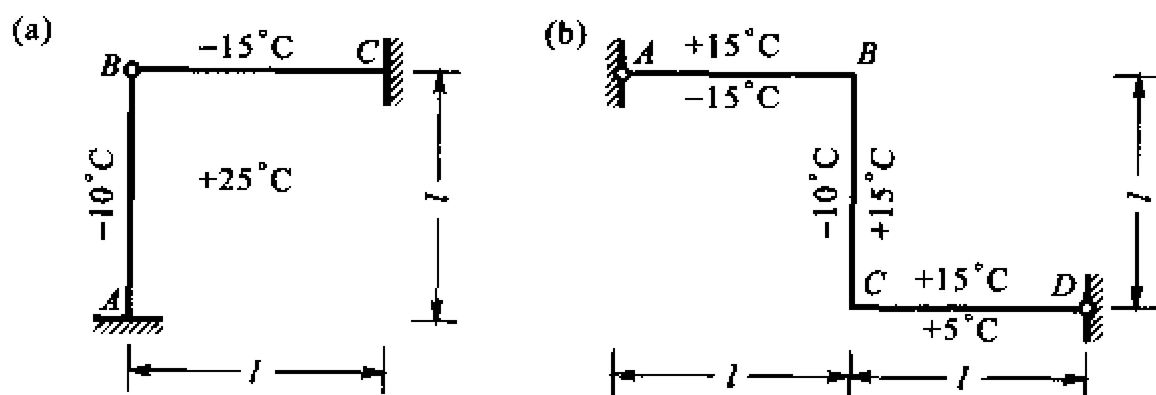
6-9 用力法求解超静定结构时应如何恰当地选取基本结构?

6-10 试绘出图示结构因支座移动产生的弯矩图。设各杆 EI 相同。



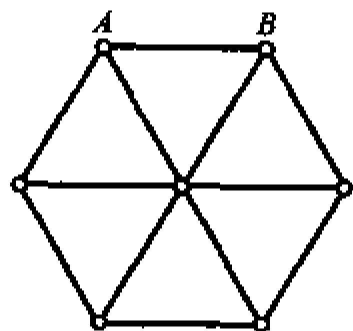
题6-10图

6-11 试绘出图示结构因温度变化产生的 M 图。已知各杆截面为矩形,EI = 常数,截面高度 $h = l/10$,材料线膨胀系数为 α。

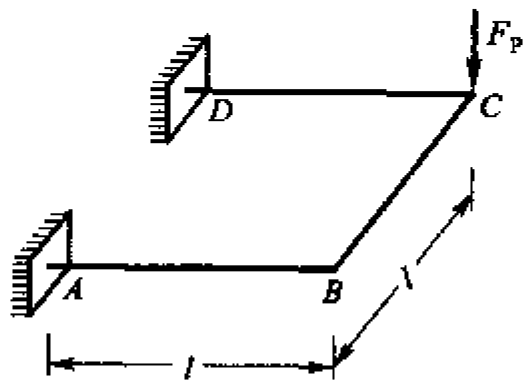


题6-11图

6-12 图示平面链杆系各杆 l 及 EA 均相同,杆 AB 的制作长度短了 Δ,现将其拉伸(在弹性范围内)拼装就位。试求该杆轴力和长度。



题6-12图

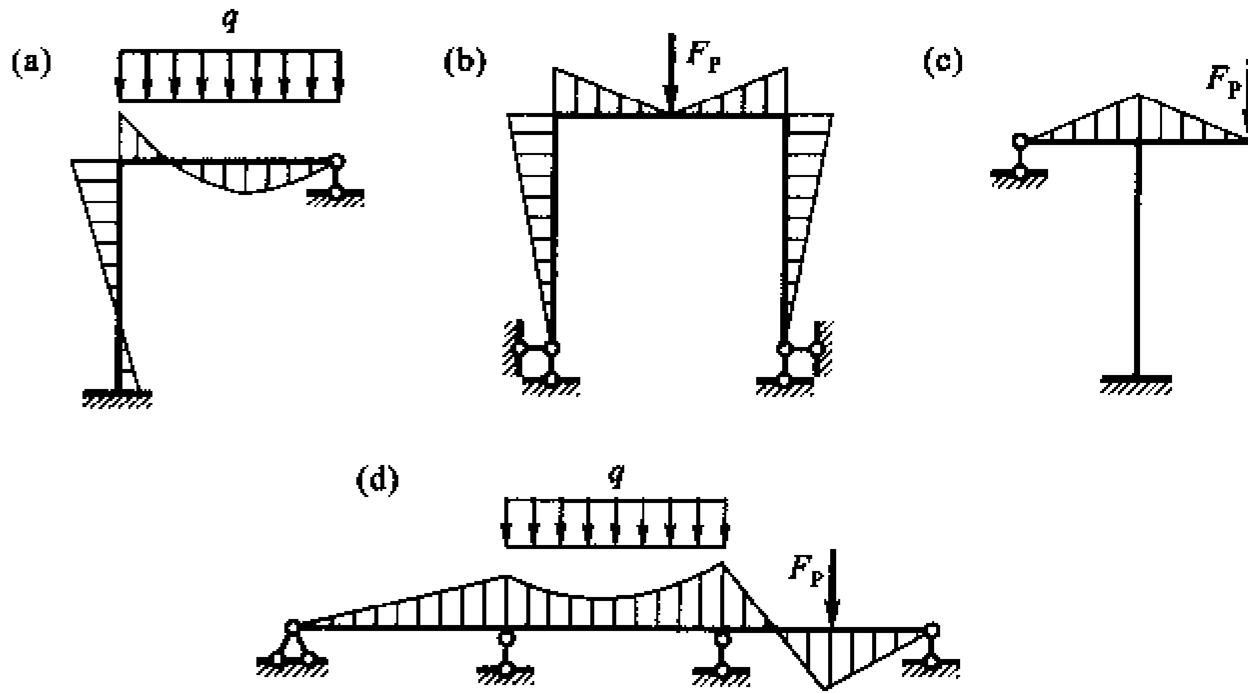


题6-13图

6-13 刚架各杆正交于结点,荷载垂直于结构平面,各杆为相同圆形截面,$G = 0.4E$。试作弯矩图和扭矩图。

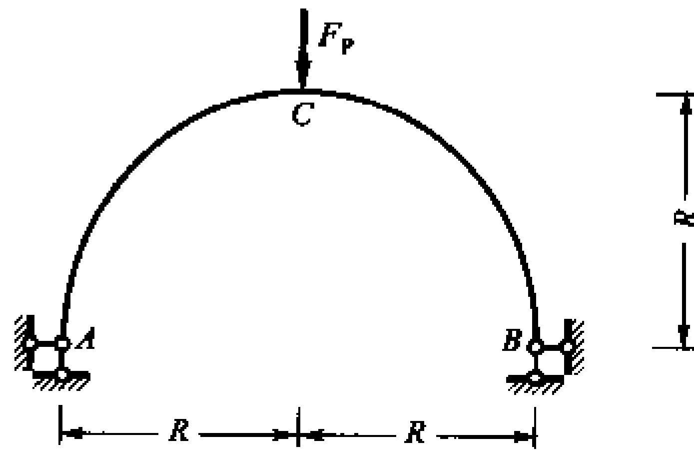
6－14　试求题6－11a所示结构铰B处两截面间的相对转角$\Delta_{\theta B}$。

6－15　试判断下列超静定结构的弯矩图形是否正确，并说明理由。



题6－15图

6－16　试求图示等截面半圆形两铰拱的支座水平推力，并画出M图。设EI＝常数，并只考虑弯曲变形对位移的影响。



题6－16图

第7章 位 移 法

§7－1 位移法的基本概念

力法是分析超静定结构的历史最悠久的基本方法，它是直接建立在静定结构受力分析的基础之上的。力法不仅为超静定结构的受力分析提供了一种普遍适用的方法，而且又为发展超静定结构的其他分析方法奠定了基础。随着工程实践的发展，力法暴露出在求解刚架等高次超静定结构时计算工作量大的缺点，这样就促使了结构分析的另一种基本方法——位移法的形成。

位移法是以结构的结点位移作为基本未知量来求解结构的受力状态。现以图 7－1a 的刚架和图 7－2a 的对称桁架为例来说明位移法的基本思路。以上都是三次超静定结构，在荷载作用下的变形分别如图中虚线所示。

对于图 7－1a 所示的刚架，若忽略杆件的轴向变形，则 B 结点不存在线位移而仅有角位移发生。因 B 处是刚结点，当它发生转角 θ 时由于变形协调，与之相连的各杆端截面的转角均等于 θ。实际上，一旦转角 θ 被求得，则所有杆件的内力便可迎刃而解，例如 AB 杆和 BD 杆分别相当于两端固定和一端固定另一端为滑动支座的梁受支座转角 θ 作用，其内力可以用力法求得；同理，BC 杆相当于一端固定另一端铰支的梁受均布荷载以及 B 端支座转角 θ 作用，其内力也可以用力法求得。在位移法中，将上述三种不同支座条件的等截面超静定杆称为三类基本的超静定杆件，利用力法可以分别导出它们在杆端位移以及外荷载作用下杆端力的一般表达式，并且可以将各种因素单独作用所引起的杆端力制成表格以方便使用。所以，关键的问题是如何求得 B 结点的转角 θ。

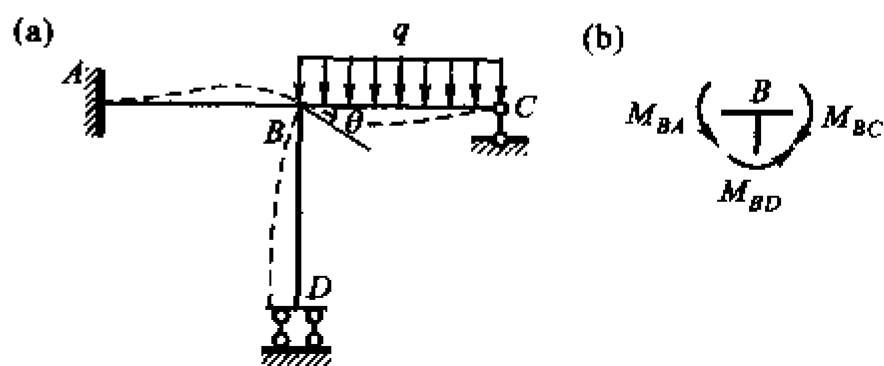


图 7－1

按照图 7－1b 的隔离体，作用于 B 结点上的杆端弯矩必须满足力矩平衡条件，即有

$$M_{BC}=M_{BA}+M_{BD}$$

上式中的各杆端弯矩都是 θ 的函数，求解上述平衡方程便可以确定 θ。由此可见，用位移法分析图 7－1a 所示刚架时只有 B 结点的转角 θ 一个基本未知量。

对于图 7－2a 所示的桁架，由于对称，A 结点只会发生竖向位移，可记为 Δ。显然，若桁架的

基本参数已知，只要确定了 Δ，所有杆件的内力也就可随之确定。由于桁架处于平衡状态，其杆件内力均为 Δ 的函数，因此可以按照图 7－2b 中铰 A 隔离体的竖向力平衡条件来确定结点位移 Δ。由此可见，用位移法分析图 7－2a 所示的桁架时也只有一个基本未知量。

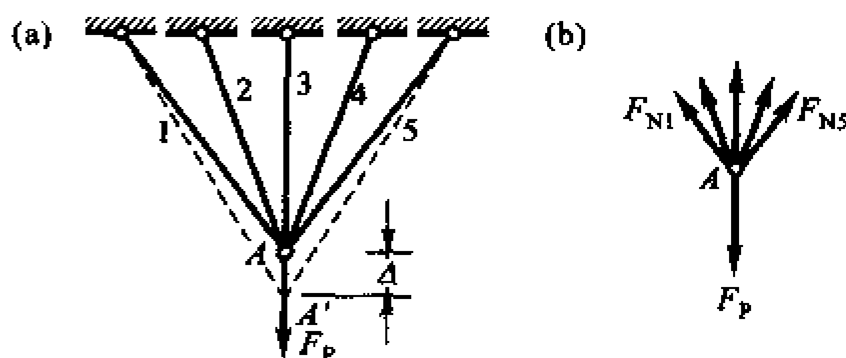


图　7－2

以上的位移法分析思路同样可适用于结构有多个结点位移，包括结点角位移和线位移同时存在的情况。需要说明的是，在位移法中并非需要将所有结点位移均作为基本未知量，例如图 7－1a 所示刚架中 C 点的转角和 D 点的水平位移就不必要作为基本未知量，因为只要求得了 B 结点的转角 θ，即可按照有关公式或表格求得它们的杆端力。于是，我们将计算杆端力所必需的 θ 称为关键位移，并作为位移法基本未知量。结构的内力和变形是在荷载和关键位移共同作用下产生的，并且，真实的内力必定满足平衡方程。对应于每一个关键位移都可以建立一个相应的结点或截面平衡方程，这些方程就称为位移法方程。求解方程可以得到各关键位移，据此即可求得结构所有杆件的内力。

§7－2　位移法基本未知量和基本结构

在用位移法作结构分析时，首先需要确定基本未知量。前已述及，位移法是以结构的关键位移作为基本未知量的。所谓关键位移，是指对于确定所有杆件的内力来说既是充分的，又是必要的。而且，关键位移是指独立的位移。如果用附加刚臂约束住结点的关键角位移，用附加链杆约束住结点的关键线位移，原结构就成为三类基本的超静定杆件以及可能存在的静定部分所组成的体系，称为位移法基本结构。从这个角度上讲，位移法基本未知量的数目，就等于约束住全部关键位移所需的附加刚臂和链杆的总数。

例如，对于图 7－3a 所示的刚架，可以用四个附加刚臂“/”约束其全部刚结点的角位移；在不考虑刚架杆件的轴向变形时，只需用两个附加链杆便可约束其全部结点的线位移，得到如图 7－3b 所示的基本结构。所以，该刚架用位移法求解时有六个基本未知量。无论该刚架承受的荷载

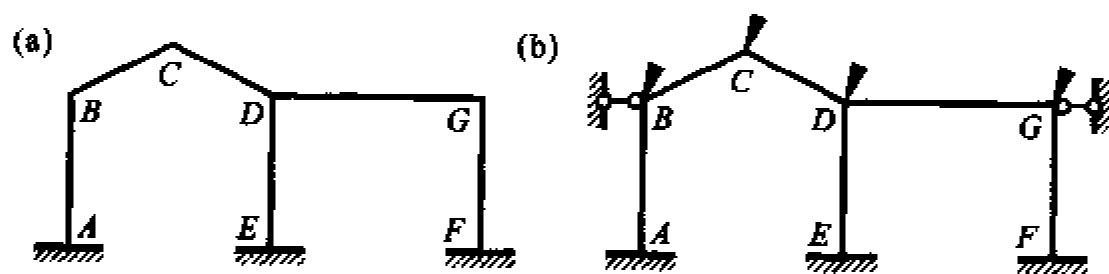


图　7－3

形式如何，只要求得了这六个关键位移，则所有杆件的内力均可以按在荷载和支座位移共同作用下的超静定杆，由公式或查表算得。该刚架的 D 和 G 结点具有相等的水平位移，又因 C 结点的水平和竖向位移均可由 B、D 结点的水平位移惟一确定，所以在五个结点线位移中只有两个独立的线位移。

在分析图 7-4a 所示结构的位移法基本未知量时，应注意横梁 EH 的弯曲刚度 $EI_1=\infty$，此时横梁只能作水平的刚体移动，所以结点 E 和 H 均不可能发生角位移。此外还应注意，由于高跨柱子的下柱与上柱的截面弯曲刚度不同，为了将其纳入三类基本的超静定杆件，必须将截面突变处的角位移和线位移作为基本未知量。所以，用位移法求解该结构时有五个基本未知量，其基本结构如图 7-4b 所示。

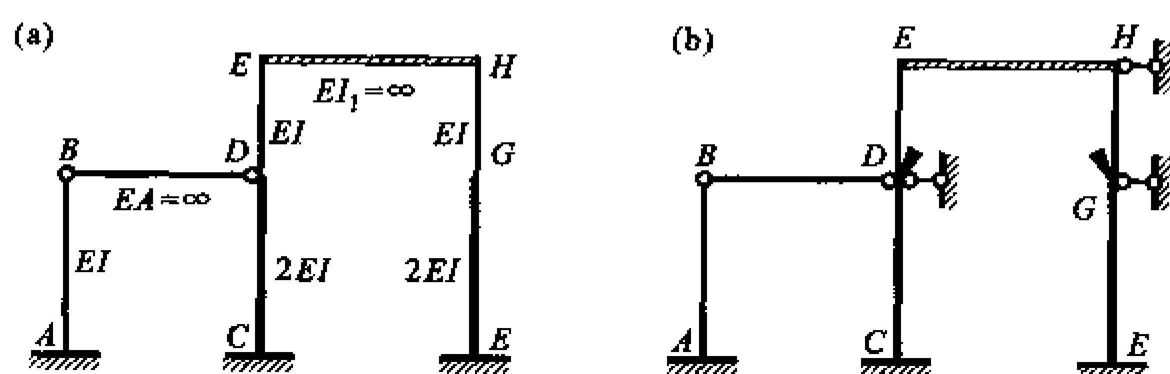


图 7-4

由以上的分析可知，对于一般的超静定梁和刚架，角位移未知量的数目就等于结构刚性结点的数目，而线位移未知量的数目等于结点可能发生的独立线位移的数目。在分析时应特别注意结构中存在无限刚性体对位移法基本未知量数目的影响，它除了可能限制某些位移的发生外，还可能使某项角位移或线位移变为非独立的位移。例如，图 7-5 所示的刚架 BC 杆的截面弯曲刚度为无穷大，虽然刚结点 B 和 C 均可以发生角位移和线位移，但独立的结点位移却只有一个，所以位移法基本未知量也就只有一个。在作刚架分析时为简化计算通常忽略杆件的轴向变形，此时杆件在轴向就成为无限刚性的。

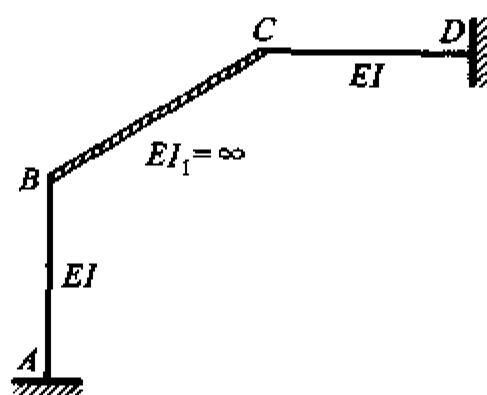


图 7-5

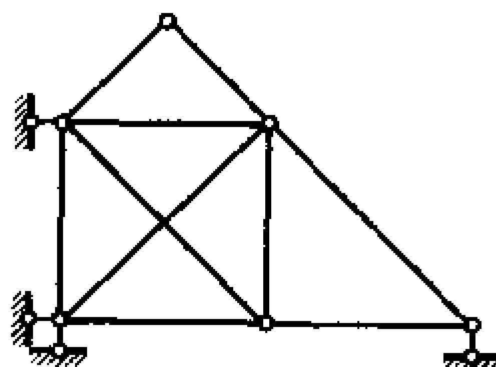


图 7-6

在作位移法基本未知量数目分析时，一般可以用附加刚臂和附加链杆逐个约束结构的关键位移，最终使之转化为由三类基本的超静定杆件，以及可能存在的静定部分所组成的体系。静定部分上是不存在关键位移的，因为它的反力和内力均可以根据静力平衡条件求得。

对于平面桁架来说，因需考虑杆件的轴向变形，所以除支座结点外每一个结点均有水平和竖

式中 F^{F}_{QAB} 和 F^{F}_{QBA} 为固端剪力，即仅由荷载引起的杆端剪力。

由式(7-1)和(7-2)可见，杆端力是由各杆端位移以及荷载单独作用所产生效应的线性叠加。为了便于应用，表7-1中列出了三类基本的超静定杆件在各单位杆端位移以及常见荷载单独作用下的杆端力，以备查用。

7-3-2　一端固定另一端铰支的等截面直杆

图7-11所示为一端固定另一端铰支的等截面直杆。设杆件 A 端发生顺时针转角 θ_A，A、B 两端发生横向相对线位移 Δ，则由力法可导得杆端弯矩的一般公式为

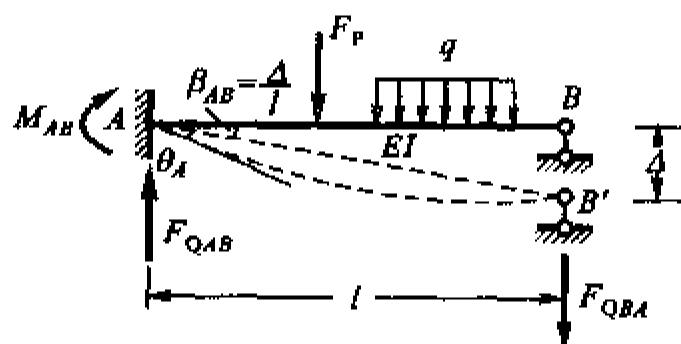


图　7-11

$$M_{AB}=3i\theta_A-3i\,\frac{\Delta}{l}+M^{F}_{AB} \tag{7-3}$$

相应的杆端剪力为

$$F_{QAB}=-\frac{3i\theta_A}{l}+\frac{3i\Delta}{l^2}+F^{F}_{QAB}$$

$$F_{QBA}=-\frac{3i\theta_A}{l}+\frac{3i\Delta}{l^2}+F^{F}_{QBA} \tag{7-4}$$

式中各符号的意义同前。

表7-1　等截面超静定杆的杆端弯矩和剪力

编号	梁的简图	弯矩		剪力	
		M_{AB}	M_{BA}	F_{QAB}	F_{QBA}
1	$\theta=1$, A, B, l	$\frac{4EI}{l}=4i$	$\frac{2EI}{l}=2i$	$-\frac{6EI}{l^2}=-6\,\frac{i}{l}$	$-\frac{6EI}{l^2}=-6\,\frac{i}{l}$
2	A, B, 1, l	$-\frac{6EI}{l^2}=-6\,\frac{i}{l}$	$-\frac{6EI}{l^2}=-6\,\frac{i}{l}$	$\frac{12EI}{l^3}=12\,\frac{i}{l^2}$	$\frac{12EI}{l^3}=12\,\frac{i}{l^2}$
3	F_P, a, b, A, B, l	$-\frac{F_P ab^2}{l^2}$ $-\frac{F_P l}{8}$ (当 $a=b=\frac{l}{2}$)	$\frac{F_P a^2 b}{l^2}$ $\frac{F_P l}{8}$	$\frac{F_P b^2(l+2a)}{l^3}$ $\frac{F_P}{2}$	$-\frac{F_P a^2(l+2b)}{l^3}$ $-\frac{F_P}{2}$

续表

编号	梁的简图	弯矩		剪力	
		M_{AB}	M_{BA}	F_{QAB}	F_{QBA}
4		$-\frac{1}{12}ql^2$	$\frac{1}{12}ql^2$	$\frac{1}{2}ql$	$-\frac{1}{2}ql$
5		$-\frac{1}{20}ql^2$	$\frac{1}{30}ql^2$	$\frac{7}{20}ql$	$-\frac{3}{20}ql$
6		$\frac{b(3a-l)}{l^2}M$	$\frac{a(3b-l)}{l^2}M$	$-\frac{6ab}{l^3}M$	$-\frac{6ab}{l^3}M$
7		$\frac{3EI}{l}=3i$	0	$-\frac{3EI}{l^2}=-3\frac{i}{l}$	$-\frac{3EI}{l^2}=-3\frac{i}{l}$
8		$-\frac{3EI}{l^2}=-3\frac{i}{l}$	0	$\frac{3EI}{l^3}=3\frac{i}{l^2}$	$\frac{3EI}{l^3}=3\frac{i}{l^2}$
9		$-\frac{F_P ab(l+b)}{2l^2}$ $-\frac{3}{16}F_P l$ $\left(当\ a=b=\frac{l}{2}\right)$	0	$\frac{F_P b(3l^2-b^2)}{2l^3}$ $\frac{11}{16}F_P$	$-\frac{F_P a^2(2l+b)}{2l^3}$ $-\frac{5}{16}F_P$
10		$-\frac{1}{8}ql^2$	0	$\frac{5}{8}ql$	$-\frac{3}{8}ql$
11		$-\frac{1}{15}ql^2$	0	$\frac{4}{10}ql$	$-\frac{1}{10}ql$
12		$-\frac{7}{120}ql^2$	0	$\frac{9}{40}ql$	$-\frac{11}{40}ql$
13		$\frac{l^2-3b^2}{2l^2}M$ $\frac{M}{8}\left(a=b=\frac{l}{2}\right)$	0 $(a<l)$	$-\frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}M$ $-\frac{9}{8l}M$	$-\frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}M$ $-\frac{9}{8l}M$

续表

编号	梁的简图	弯矩		剪力	
		M_{AB}	M_{BA}	F_{QAB}	F_{QBA}
14		$\frac{EI}{l}=i$	$-\frac{EI}{l}=-i$	0	0
15		$-\frac{F_P a(l+b)}{2l}$ $-\frac{3F_P l}{8}$ $\left(当\ a=b=\frac{l}{2}\right)$	$-\frac{F_P a^2}{2l}$ $-\frac{F_P l}{8}$	F_P F_P	0
16		$-\frac{1}{3}ql^2$	$-\frac{1}{6}ql^2$	ql	0
17		$-\frac{1}{8}ql^2$	$-\frac{1}{24}ql^2$	$\frac{1}{2}ql$	0
18		$-\frac{5}{24}ql^2$	$-\frac{1}{8}ql^2$	$\frac{1}{2}ql$	0
19		$-M\frac{b}{l}$ $-\frac{M}{2}$ $\left(当\ a=b=\frac{l}{2}\right)$	$-M\frac{a}{l}$ $-\frac{M}{2}$	0	0

7-3-3 一端固定另一端滑动支座的等截面直杆

图 7-12 所示为一端固定另一端滑动支座的等截面直杆。若结构变形时杆件 A 端发生转角 θ_A，则杆端弯矩的一般公式为

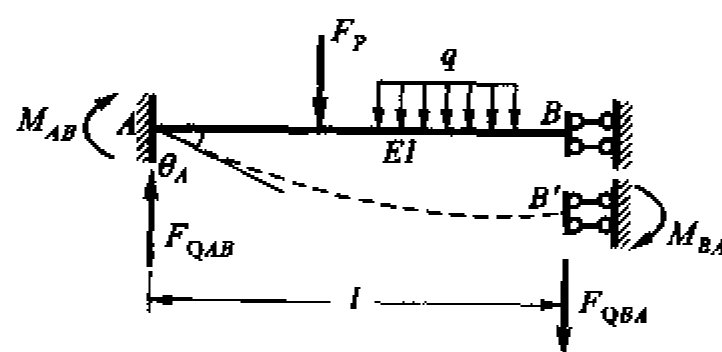


图 7-12

$$\left.\begin{aligned}M_{AB}&=i\theta_A+M_{AB}^{F}\\M_{BA}&=-i\theta_A+M_{BA}^{F}\end{aligned}\right\}\tag{7-5}$$

相应的杆端剪力为

$$F_{QAB}=F_{QAB}^{F}\tag{7-6}$$

最后来讨论一下与以上转角位移方程相关的基本概念。

首先应明确的是，杆件的受力状态是由其两端的角位移、线位移以及作用于杆件上的荷载惟一确定的。例如，对于图7-10的简支杆，若迫使其 A、B 两端的角位移以及相对线位移与图7-9所示的两端固定杆相同，则荷载相同时该简支杆的杆端弯矩和剪力及其变形状态将与上述两端固定杆完全相同。同样，若迫使图7-11的一端固定另一端铰支杆或图7-12一端固定另一端滑动支座杆的两端发生与图7-9两端固定杆相同的位移，则荷载相同时其受力状态也就完全相同。实际上，只要杆端位移均为指定值，则不管它原先的支承条件如何，实际上就相当于两端固定杆。若将全部杆端位移均作为未知量，则所有杆件(包括静定杆)都可以归入两端固定杆这一种基本杆件(见下册第8章矩阵位移法)。当然，此时位移法基本未知量的数目一般就会增加。

此外，在实际结构中，刚架杆件一般都受到轴向力的作用，它会使杆件产生附加弯矩和剪力。轴向力对杆端力的影响取决于杆件位移和轴力的大小。对于一般的刚架结构来说，结构位移在小变形范围内，杆件的轴力一般远小于其失稳的临界荷载，此时通常可以忽略轴向力对弯矩和剪力的影响。但对于例如超高层建筑等结构位移和轴力均较大的情况，这种影响常常是不可忽视的。

§7-4 位移法原理与位移法方程

如前所述，位移法是以关键位移作为基本未知量；根据相应的结点力矩或截面平衡条件列出位移法方程并解出关键位移；最后按照三类基本超静定杆的转角位移方程、有关表格和静力平衡条件求得各杆端力。以下举例来说明位移法原理与位移法方程的建立。

图7-13a所示为一具有三个位移法未知量的超静定刚架，荷载作用下的变形如虚线所示。若用两个附加刚臂和一个附加链杆约束关键位移，则得如图7-13b所示的基本结构。图中 Z_1、Z_2 和 Z_3 及相应的箭头代表原结构的关键位移及其方向，其中结点角位移的方向按正向设定，线位移的方向可以任意设定。如果 Z_1、Z_2 和 Z_3 的大小和方向与原结构相应位移完全符合，则基本结构的全部内、反力和变形也将与原结构完全一致。

结构实际的变形状态应该使其每一个组成部分均达到平衡。根据线弹性问题解的惟一性定理，符合平衡和变形协调条件的结构变形状态应是惟一的。在位移法中，变形协调条件实际上在未知量设定时已经得到满足。例如，图7-13中对于每一个刚性结点只设定了一个角位移未知量，这意味着与刚性结点联结的两杆端具有相同的，亦即变形协调的转角；对于不考虑轴向变形的横梁也只设定了一个侧移未知量，这意味着与该横梁联结的两杆端具有相同的，亦即变形协调的侧移。这样，余下的条件就是关键位移应使杆件内力满足平衡条件，这也就是确定关键位移的基本条件。

建立平衡方程可以通过以下两种不同的途径。一种是将杆端力视作各影响因素单独作用效果的叠加，由此借助平衡条件建立位移法方程；另一种是直接利用转角位移方程，按结点和截面平衡条件建立位移法方程。

7－4－1　典型方程法

前已述及，结构的受力状态是由荷载和各关键位移共同作用下形成的。根据线弹性体系的叠加原理，可以将最终受力状态看作是上述各因素单独作用下效应的叠加。

图7－13c、d、e、f 就是荷载以及关键位移 Z_1、Z_2、Z_3 单独作用时的情况，后者是在各关键位移取为单位位移1的基础上再乘以相应的位移数值得到的。为了使以上某一因素发生时，其他因素均不发生，即保持为零，附加刚臂和链杆中一般均有约束反力产生。图中以 R_{1P}、R_{2P}、R_{3P}① 表示荷载作用时的各附加约束反力；r_{11}、r_{21}、r_{31} 表示 $Z_1=1$ 单独作用时的各附加约束反力，以此类推。在单独因素作用下的附加约束反力，可以根据图7－13的荷载弯矩图 M_P 或各单位弯矩图 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$、$\overline{M}_3$ 求得。因实际结构不存在附加约束，所以当荷载和全部关键位移同时作用于基本结构时，各附加约束反力应都为零，据此可以写出位移法方程：

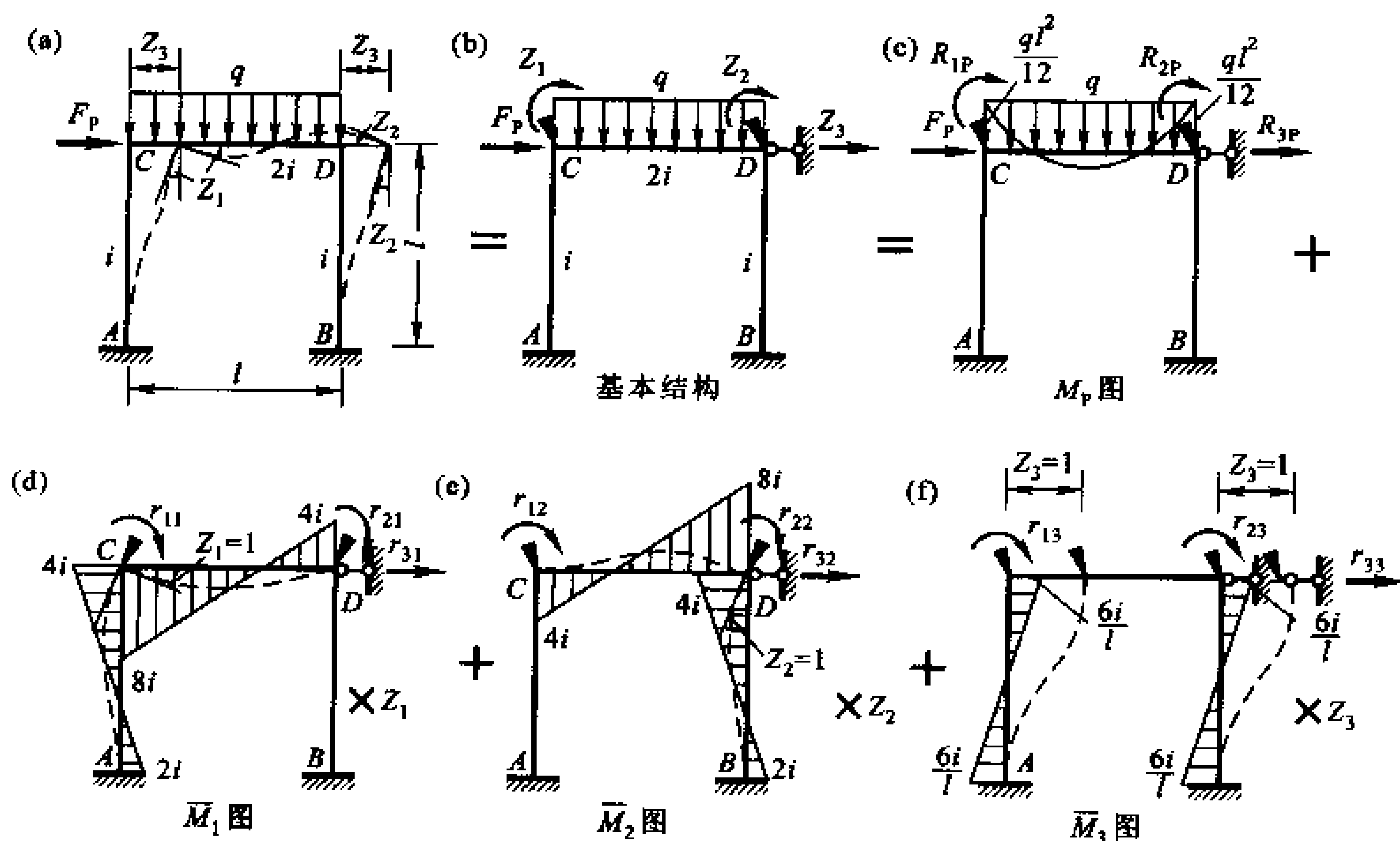


图　7－13

$$\left.\begin{aligned}r_{11}Z_1+r_{12}Z_2+r_{13}Z_3+R_{1P}=0\\r_{21}Z_1+r_{22}Z_2+r_{23}Z_3+R_{2P}=0\\r_{31}Z_1+r_{32}Z_2+r_{33}Z_3+R_{3P}=0\end{aligned}\right\}$$

① 这里，R_{iP}表示广义的附加约束反力，本书仍沿用以往教材中使用的 R_{iP}表示。同理，以下 r_{ij} 也类同处理。

式中 r_{ij} 称为未知位移的系数项，它表示 $Z_j=1$ 单独作用时在第 i 个附加约束上产生的反力；R_{iP} 称为自由项，它表示荷载单独作用时，在第 i 个附加约束上产生的反力，故又称为荷载项。r_{ij} 和 R_{iP} 均取与所设关键位移 Z_i 的方向一致为正，反之，则为负。

以上系数和自由项均为常数项，可以按照图 7－13c、d、e、f 所示的荷载弯矩图和单位弯矩图，根据结点或截面的平衡条件求得。图 7－14a、b 所示为 $Z_1=1$ 时结点 C、D 的隔离体，各杆端弯矩可见于 $\overline{M}_1$ 图。由结点的力矩平衡条件，结合反力互等定理可知

图　7－14

$$r_{11}=4i+8i=12i,\quad r_{21}=r_{12}=4i$$

$Z_1=1$ 时附加链杆中的反力可以根据图 7－14c 横梁隔离体的平衡条件确定。由 $\overline{M}_1$ 图所示 AC 杆两端的杆端弯矩可求得，$F_{QCA}=-\dfrac{6i}{l}$。再由横梁 $\sum F_x=0$，结合反力互等定理可知

$$r_{31}=r_{13}=-\frac{6i}{l}$$

同理，可求得方程的其他系数和自由项如下：

$$r_{22}=8i+4i=12i,\quad r_{23}=r_{32}=-\frac{6i}{l},\quad r_{33}=\frac{12i}{l^2}+\frac{12i}{l^2}=\frac{24i}{l^2}$$

$$R_{1P}=-\frac{ql^2}{12},\quad R_{2P}=\frac{ql^2}{12},\quad R_{3P}=-F_P$$

代入位移法方程得

$$\left.\begin{aligned}12iZ_1+4iZ_2-\frac{6i}{l}Z_3-\frac{ql^2}{12}=0\\4iZ_1+12iZ_2-\frac{6i}{l}Z_3+\frac{ql^2}{12}=0\\-\frac{6i}{l}Z_1-\frac{6i}{l}Z_2+\frac{24i}{l^2}Z_3-F_P=0\end{aligned}\right\}$$

由此可以解得位移法基本未知量 Z_1、Z_2 和 Z_3。

求解有 n 个位移法基本未知量的超静定结构时应设置 n 个附加约束，而每一个附加约束分别对应一结点或截面平衡条件，相应地也就有 n 个平衡条件，据此可以建立 n 个位移法方程，从而可以解出全部关键位移。此时，位移法方程可写为

$$\left.\begin{aligned}r_{11}Z_1+r_{12}Z_2+\cdots+r_{1n}Z_n+R_{1P}=0\\r_{21}Z_1+r_{22}Z_2+\cdots+r_{2n}Z_n+R_{2P}=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\r_{n1}Z_1+r_{n2}Z_2+\cdots+r_{nn}Z_n+R_{nP}=0\end{aligned}\right\}\qquad(7-7)$$

式(7－7)即为位移法方程的一般形式，不论结构是什么形式，位移法方程的形式是不变的，故式(7－7)常称为位移法典型方程。由以上的分析可知，位移法方程的实质是一组平衡方程。

r_{ij}是由单位位移$Z_j=1$引起的沿Z_i方向的附加约束反力，常称为刚度系数；R_{iP}是由荷载引起的沿Z_i方向的附加约束反力，称为自由项。当这些附加约束反力与所设未知量方向一致时为正，反之，则为负。上述符号中的第一个下标表示与未知位移序号相应的附加约束反力序号，第二个下标则表示产生该项附加约束反力的原因。所有这些附加约束反力均可以根据隔离体平衡条件求得。位于方程左上方r_{11}至右下方r_{nn}的一条主对角线上的系数r_{ii}称为主系数，主对角线两侧的其他系数$r_{ij}(i\neq j)$则称为副系数。主系数r_{ii}代表由单位位移$Z_i=1$的作用所引起在Z_i自身方向上的约束反力，它必定与该单位位移的方向一致，故是恒正的；而副系数$r_{ij}(i\neq j)$代表由单位位移$Z_j=1$的作用所引起的Z_i方向的约束反力，它可以与所设定的Z_i同向、反向，或者是无该项约束反力发生，所以它可能为正、为负或为零。根据反力互等定理有

$$r_{ij}=r_{ji} \tag{7-8}$$

式(7－7)的位移法典型方程也可写成如下的矩阵形式：

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}}=\boldsymbol{0} \tag{7-9}$$

式中$\boldsymbol{r}$称为刚度矩阵，其矩阵元素由式(7－7)中的全部刚度系数项r_{ij}构成，由式(7－8)可知，$\boldsymbol{r}$为对称矩阵；$\boldsymbol{Z}$为未知位移向量；$\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}}$为荷载引起的附加约束力向量。

位移法方程是一个线性代数方程组，求解这一个方程组可以得到全部基本未知量，即全部关键位移。此时，结构杆件的杆端弯矩和剪力一般可以根据转角位移方程直接求算，也可根据叠加原理用下式计算：

$$\left.\begin{aligned}M&=\overline{M}_1Z_1+\overline{M}_2Z_2+\cdots+\overline{M}_nZ_n+M_{\mathrm{P}}\\F_{\mathrm{Q}}&=\overline{F}_{\mathrm{Q1}}Z_1+\overline{F}_{\mathrm{Q2}}Z_2+\cdots+\overline{F}_{\mathrm{Q}n}Z_n+N_{\mathrm{QP}}\\F_{\mathrm{N}}&=\overline{F}_{\mathrm{N1}}Z_1+\overline{F}_{\mathrm{N2}}Z_2+\cdots+\overline{F}_{\mathrm{N}n}Z_n+F_{\mathrm{NP}}\end{aligned}\right\} \tag{7-10}$$

式中$\overline{M}_i$、$\overline{F}_{\mathrm{Q}i}$和$\overline{F}_{\mathrm{N}i}$分别是基本结构由于$Z_i=1$的作用而产生的内力；$M_{\mathrm{P}}$、$F_{\mathrm{QP}}$和$F_{\mathrm{NP}}$则分别是基本结构由于荷载作用而产生的内力。

7－4－2　倾角变位法

应用以上典型方程法计算超静定结构时，需先设置附加刚臂和附加链杆约束以构成基本结构，然后再根据叠加原理和平衡条件建立位移法典型方程。实际上，位移法基本方程的建立，也可以不通过基本结构，而直接借助于杆件的转角位移方程进行，这种方法就称为倾角变位法。

现仍以图7－13a所示的刚架为例来说明倾角变位法的基本原理。此时，位移法基本未知量仍为三个，包括两个角位移Z_1、Z_2和一个线位移Z_3。

根据图7－15a所示刚架各杆两端的位移情况和杆件所承受的荷载，利用转角位移方程(7－1)和(7－2)，可直接写出各杆件的杆端力表达式为

$$M_{AC}=2iZ_1-\frac{6i}{l}Z_3,\quad M_{BD}=2iZ_2-\frac{6i}{l}Z_3$$

$$M_{CA}=4iZ_1-\frac{6i}{l}Z_3,\quad M_{DB}=4iZ_2-\frac{6i}{l}Z_3$$

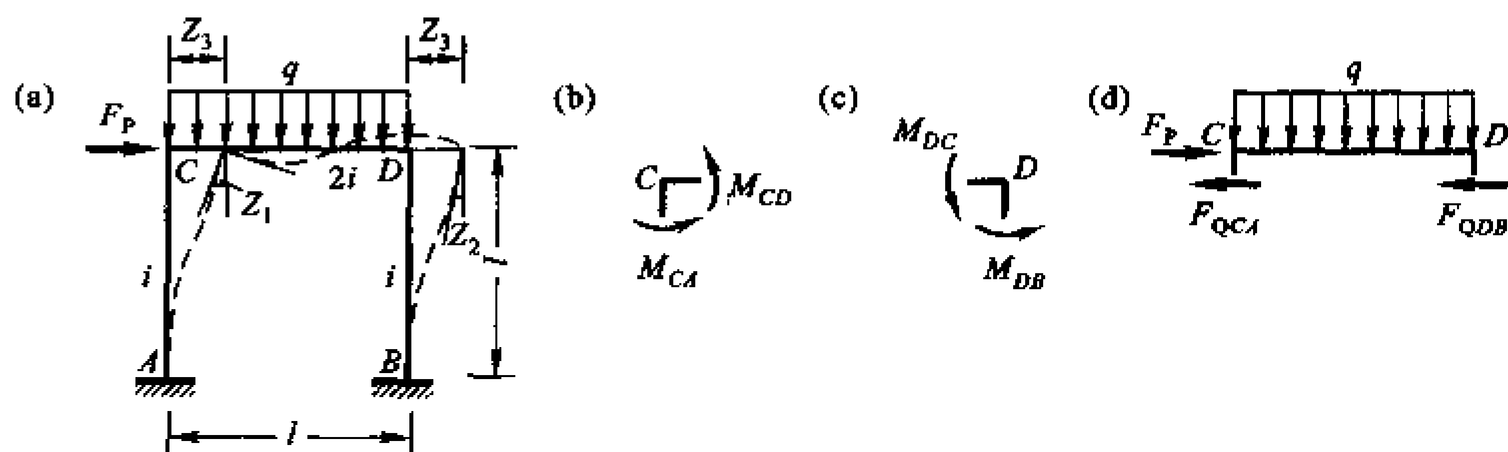


图　7-15

$$M_{CD}=8iZ_1+4iZ_2-\frac{ql^2}{12},\quad F_{QCA}=-\frac{6i}{l}Z_1+\frac{12i}{l^2}Z_3$$

$$M_{DC}=8iZ_2+4iZ_1+\frac{ql^2}{12},\quad F_{QDB}=-\frac{6i}{l}Z_2+\frac{12i}{l^2}Z_3$$

以上各杆端内力均假定为正向，它们都是结点位移 Z_1、Z_2 和 Z_3 的函数。只要确定了结点位移的大小和方向，各杆端内力的大小和方向也就可随之确定。

由刚架 C 结点的力矩平衡条件(图 7-15b)$\sum M_C=0$，可得

$$M_{CA}+M_{CD}=0$$

将前已列出的杆端弯矩 M_{CA}、M_{CD}代入上式，整理后得方程

$$12iZ_1+4iZ_2-\frac{6i}{l}Z_3-\frac{ql^2}{12}=0$$

由刚架 D 结点的力矩平衡条件(图 7-15c)$\sum M_D=0$，可得

$$M_{DC}+M_{DB}=0$$

将杆端弯矩 M_{DC}、M_{DB}代入上式，整理后得方程

$$4iZ_1+12iZ_2-\frac{6i}{l}Z_3+\frac{ql^2}{12}=0$$

由刚架横梁 CD 水平力的平衡条件(图 7-15d)$\sum F_x=0$，可得

$$F_{QCA}+F_{QDB}-F_P=0$$

将前已列出的杆端剪力 F_{QCA}、F_{QDB}代入上式，整理后得方程

$$-\frac{6i}{l}Z_1-\frac{6i}{l}Z_2+\frac{24i}{l^2}Z_3-F_P=0$$

联立求解以上三个平衡方程，便可求得结点未知位移 Z_1、Z_2、Z_3，代入前已列出的杆端力表达式，即可求得各杆的杆端力。

由以上的分析可知，倾角变位法是建立在荷载以及位移法各基本未知量同时作用的基础之上，先是利用转角位移方程列出各杆件的杆端力，然后根据结点和截面的平衡条件列出位移法方程。采用倾角变位法得到的位移法方程与采用典型方程法时完全相同。

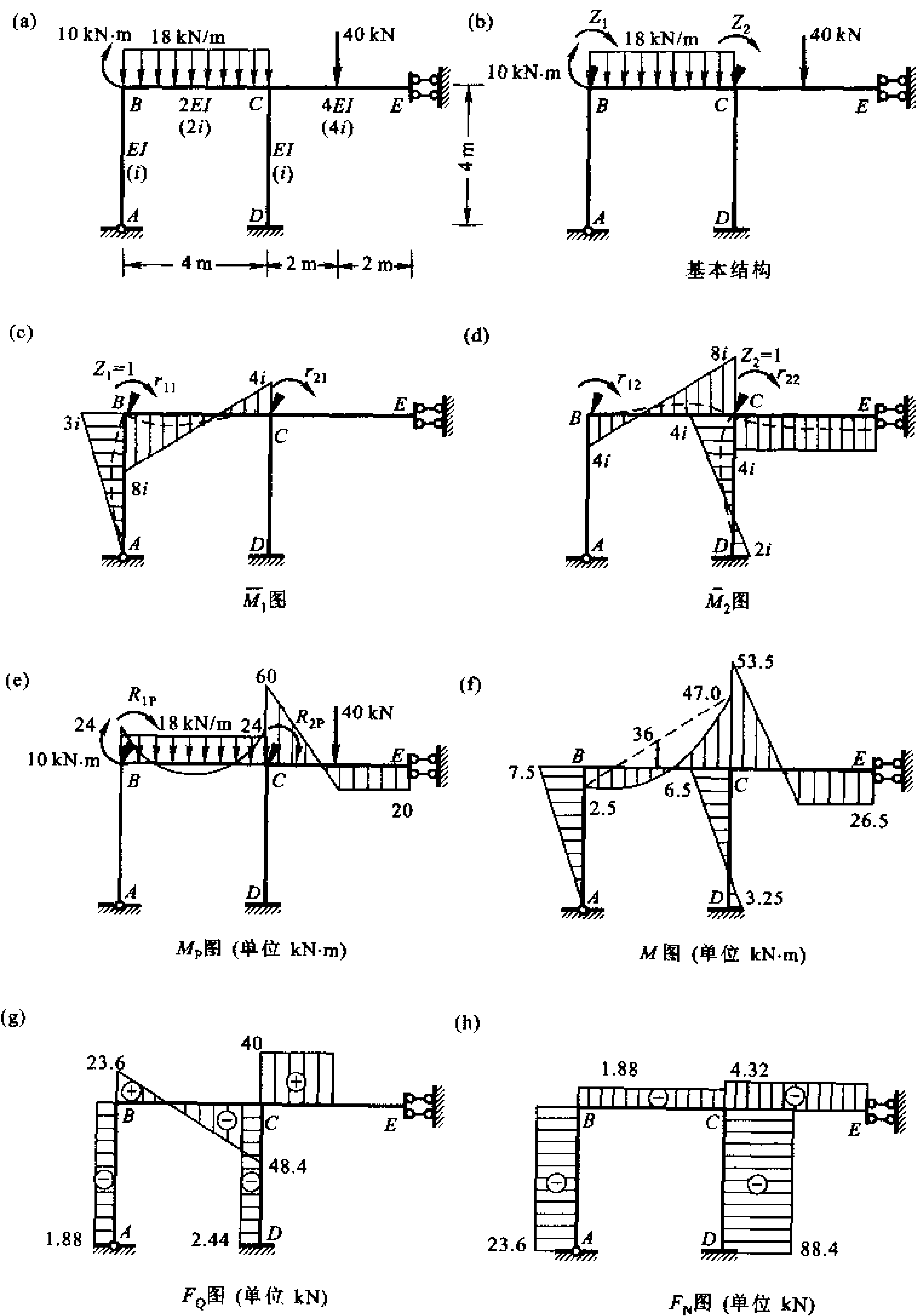


图 7-16

现结合例 7-3 的讨论来说明两个基本概念：

（1）在力法求解超静定结构时已经述及，在荷载作用下，超静定结构的内力仅取决于杆件的相对刚度，而与绝对刚度无关。因此，在用位移法分析时，为计算简便起见可以假定某一杆件的线刚度 $i=1$，其余杆件可按已知的相对线刚度取值，解得的结构内力是与原结构相同的。

（2）在用位移法进行超静定刚架的受力分析时，一般忽略杆件轴向变形的影响，这就相当于将杆件的轴向刚度视为无穷大。当沿某杆件轴向为超静定时，其轴力会因缺少变形协调条件而无法求出。例如，例 7-3 刚架若在 B 结点处加一水平链杆支座，则横梁 BC 和 CE 杆的轴力就无法确定。

例 7-4　试计算图 7-17a 所示刚架，并绘出弯矩图。

解　该刚架共有两个关键位移，即 D 结点的角位移和横梁的水平线位移。注意 C 结点的转角并非关键位移，因为悬臂段属于静定部分。由于刚架各杆件的截面弯曲刚度 EI 为常数，可以将 AC、BD 和 CD 杆的线刚度均记为 i，如图 7-17a 括号内所示。

方法一：典型方程法

采用典型方程法时基本结构如图 7-17b 所示。根据基本结构中附加约束反力等于零的条件，可建立位移法方程如下：

$$r_{11}Z_1+r_{12}Z_2+R_{1P}=0$$
$$r_{21}Z_1+r_{22}Z_2+R_{2P}=0$$

各单位弯矩图 $\bar{M}_1$、$\bar{M}_2$ 和荷载弯矩图 M_P 分别如图 7-17c、d 和 e 所示。

由上述弯矩图中 D 结点隔离体的力矩平衡条件可得

$$r_{11}=4i+3i=7i,\quad r_{12}=r_{21}=-\frac{3i}{2}\ \mathrm{m^{-1}},\quad R_{1P}=-30\ \mathrm{kN\cdot m}$$

再按图 7-17d、e 由横梁 CD 隔离体平衡条件 $\sum F_x=0$，得

$$r_{22}=\frac{3i}{16}\ \mathrm{m^{-2}}+\frac{3i}{4}\ \mathrm{m^{-2}}=\frac{15i}{16}\ \mathrm{m^{-2}},\quad R_{2P}=\left(-\frac{3}{8}\times20\times4-30\right)\mathrm{kN}=-60\ \mathrm{kN}$$

将求得的各系数和自由项代入位移法方程，得

$$7iZ_1-\frac{3i}{2}\ \mathrm{m^{-1}}Z_2-30\ \mathrm{kN\cdot m}=0$$
$$-\frac{3i}{2}\ \mathrm{m^{-1}}Z_1+\frac{15i}{16}\ \mathrm{m^{-2}}Z_2-60\ \mathrm{kN}=0$$

求解以上联立方程，得

$$Z_1=\frac{630}{23i}\ \mathrm{kN\cdot m},\quad Z_2=\frac{2\,480}{23i}\ \mathrm{kN\cdot m^2}$$

根据以上结果，求得刚架弯矩图如图 7-17f 所示。

方法二：倾角变位法

利用不同类型的转角位移方程，可以写出刚架的各杆端弯矩如下：

$$M_{AC}=-\frac{3i}{4}\ \mathrm{m^{-1}}Z_2-\frac{20\ \mathrm{kN/m}\times(4\ \mathrm{m})^2}{8}=-\frac{3i}{4}\ \mathrm{m^{-1}}Z_2-40\ \mathrm{kN\cdot m},\quad M_{DC}=3iZ_1-30\ \mathrm{kN\cdot m}$$

$$M_{DB}=4iZ_1-\frac{3i}{2}\ \mathrm{m^{-1}}Z_2,\quad M_{BD}=2iZ_1-\frac{3i}{2}\ \mathrm{m^{-1}}Z_2$$

根据建立横梁隔离体平衡方程的需要，列出柱顶剪力为

$$F_{QCA}=\frac{3i}{4^2}\ \mathrm{m^{-2}}Z_2-\frac{3}{8}\times20\ \mathrm{kN/m}\times4\ \mathrm{m}=\frac{3i}{16}\ \mathrm{m^{-2}}Z_2-30\ \mathrm{kN}$$

$$F_{QDB}=-\frac{6i}{4}Z_1+\frac{12i}{4^2}\ \mathrm{m^{-2}}Z_2=-\frac{3i}{2}Z_1+\frac{3i}{4}\ \mathrm{m^{-2}}\ Z_2$$

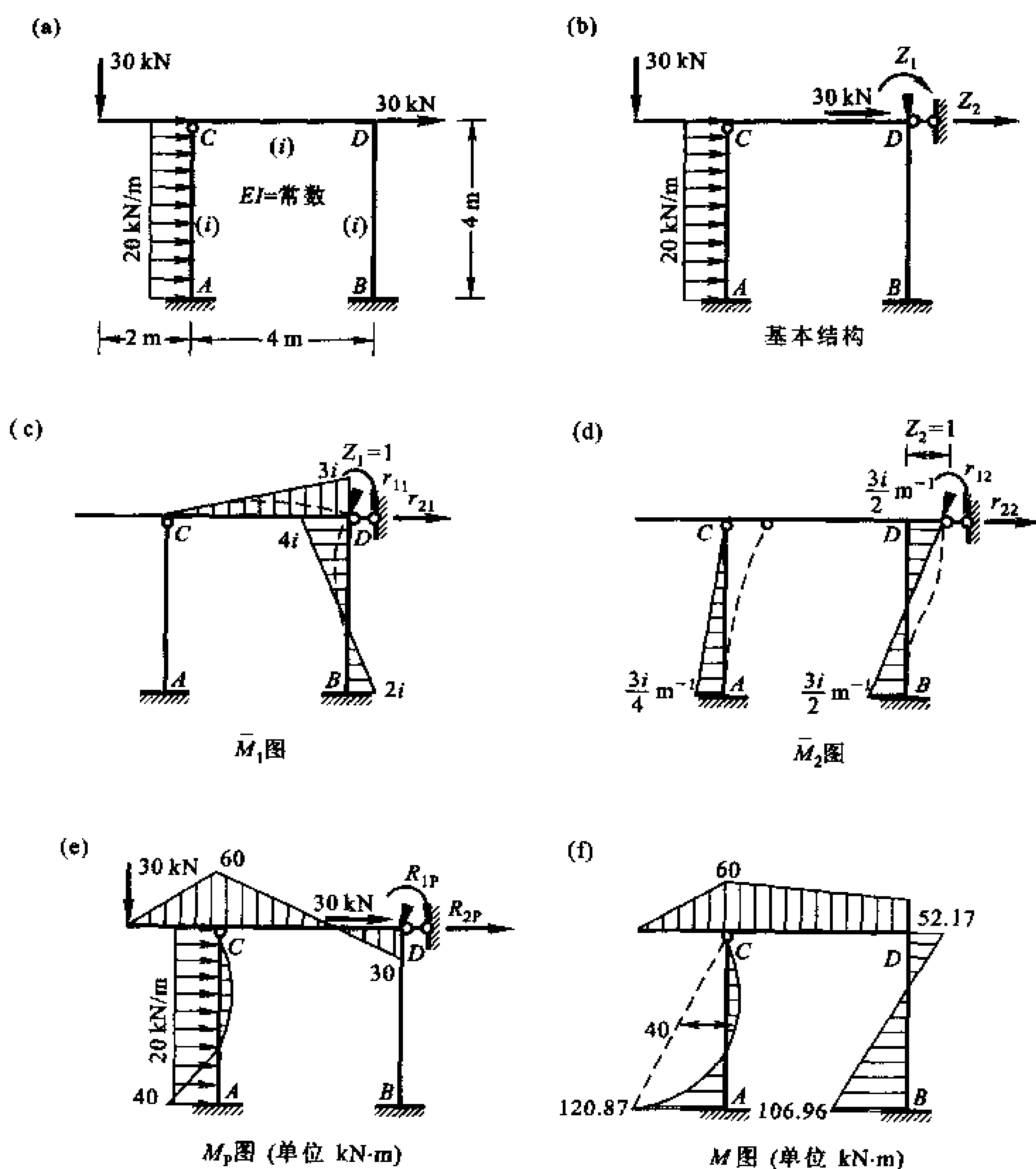


图　7－17

由刚架 D 结点的力矩平衡条件$\sum M_D=0$,可得

$$M_{DC}+M_{DB}=0$$

将相应的杆端弯矩代入上式,并整理后得

$$7iZ_1-\frac{3i}{2}\ \text{m}^{-1}Z_2-30\ \text{kN·m}=0$$

由横梁隔离体的平衡条件$\sum F_x=0$,可得

$$F_{QCA}+F_{QDB}-30\ \text{kN}=0$$

将相应的杆端剪力代入上式,并整理后得

$$-\frac{3i}{2}\ \text{m}^{-1}Z_1+\frac{15i}{16}\ \text{m}^{-2}Z_2-60\ \text{kN}=0$$

由以上分析可知,采用倾角变位法直接利用转角位移方程所得到的位移法方程与采用典型方程法时得到的

方程完全相同。联立求解上述位移法方程，即可得到结点未知位移 Z_1、Z_2，再将 Z_1、Z_2 代入前已列出的杆端弯矩表达式，就可求出各杆端弯矩。静定部分的弯矩可利用静力平衡条件求得。

通过例 7-4 的分析，应了解以下基本概念：

(1) 当超静定结构中有静定部分时，该部分不存在关键位移，作用于静定部分的荷载可能对位移法方程的自由项产生影响，但不会对方程的系数项产生影响。

(2) 根据反力互等定理，位移法方程的副系数可以由两个不同的单位弯矩图求得，实际计算时可以按方便的原则进行。例如，在例 7-4 中，r_{12} 已直接显示在 $\overline{M}_2$ 图中，可方便地获得；若利用 $\overline{M}_1$ 图求 r_{21}，则需要根据横梁隔离体水平方向的平衡条件计算。

7-5-2 具有复杂牵连位移的刚架

所谓牵连位移，是指由于某些附加条件，使得结点位移之间相互不独立，或者说它们之间存在一定的牵连关系。图 7-18a、b 所示的刚架，若忽略杆件的轴向变形，则无论荷载情况如何，根据几何学的原理均可以判定 C、D 两结点的线位移均在水平方向，而且必定是相等的，这是比较简单的牵连位移情况。

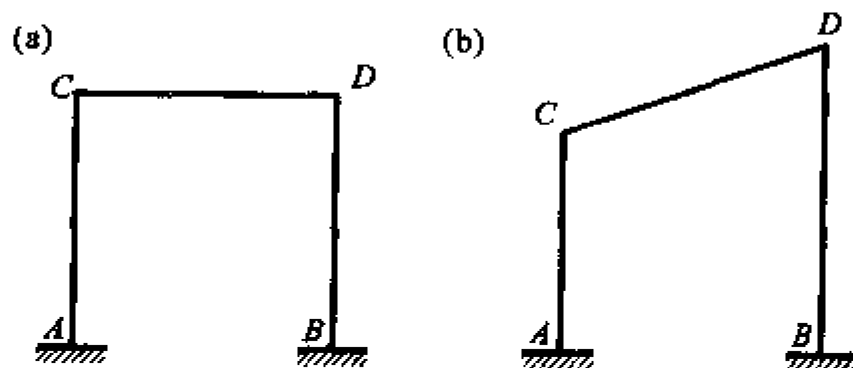


图 7-18

复杂牵连位移是指相互不独立的结点位移之间并非简单地相等，它们之间的关系可以用数学式表达。牵连关系可以发生在线位移之间，也可以发生在线位移与角位移之间。图 7-19 所示的刚架，若忽略杆件的轴向变形，C、D 两结点的线位移是相互不独立的。为了求得两线位移之间的关系，最为方便的是借助于瞬时中心的概念。由于 C、D 结点的线位移分别是沿 AC 和 BD 杆的垂直方向，瞬时中心 O 就位于杆件延长线的交点上。C、D 结点的线位移将分别和结点与瞬时中心的距离成正比，即有关系 $\dfrac{\Delta_C}{\Delta_D}=\dfrac{OC}{OD}$，此时 CD 杆的弦转角 β_{CD} 相当于将 OCD 看作刚体绕 O 点转动时的转角，即等于结点线位移与旋转半径之比。图 7-20 所示刚架，因 BC 杆的截面弯曲刚度 $EI_1=\infty$，B 结点的竖向线位移与 C 结点的转角之间存在牵连关系，若将 C 结点的角位移设为位移法基本未知量 Z_1，则 B 结点的竖向位移就等于 $l\cdot Z_1$。因此，位移法基本未知量数目为 1。

从以上例子可以看出，牵连位移的发生都是因为结构中有无限刚性体这一附加条件存在的缘故。用位移法计算有复杂牵连位移的刚架时，在分析原理上与计算一般刚架并无区别，需要注意的一是应找出牵连位移关系；二是对于带有斜杆的刚架，在建立位移法方程时一般需用到隔离

体绕其瞬时中心的力矩平衡条件。

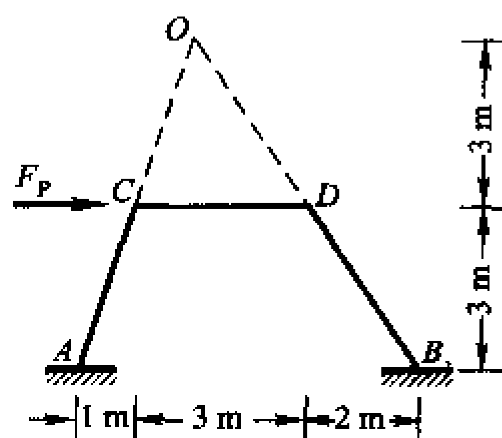


图　7-19

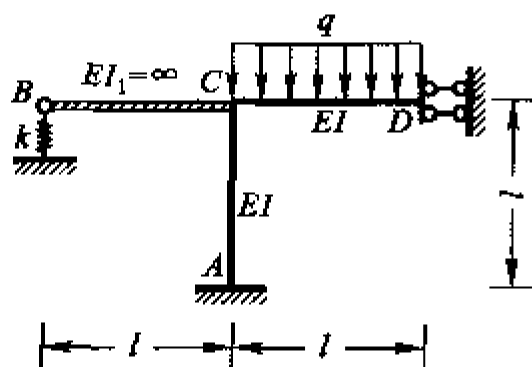


图　7-20

例 7-5　试列出图 7-21a 所示有斜杆刚架的位移法方程。

解　该刚架用位移法求解时，除了 B 结点的角位移未知量外，B、C 结点均有线位移存在。根据结构的构造特点，B 结点的线位移是沿水平方向，而结点 C 的线位移将与 CD 杆方向垂直。忽略杆件的轴向变形时，这两个线位移之间相互不独立，因此该刚架仅有两个位移法基本未知量，基本结构如图 7-21b 所示。

因超静定结构在荷载作用下的内力仅与杆件的相对刚度有关，为计算方便设 $i=\frac{EI}{20a}$。作出 $\overline{M}_1$ 图如图 7-21c所示。在作 $\overline{M}_2$ 图时，可先根据前述结点 B 和C 的运动学特征，找出瞬时中心 O 如图 7-21d 所示。当发生 $Z_2=1$ 时，结点 B、C 的线位移可看作是由三角形 OBC 绕瞬时中心 O 的刚体转动引起，线位移的大小将与动点至瞬时中心的距离成正比；线位移在某一方向上的投影将和瞬时中心与相应的投影线的距离成正比。于是，得各杆件两端的相对线位移 $\Delta_{AB}=-1$，$\Delta_{BC}=-\frac{4}{3}$ 和 $\Delta_{CD}=\frac{5}{3}$。由此可作出 M_2 图以及相应的隔离体图如图 7-21d和 e 所示。外荷载作用于基本结构时的 M_P 图及相应的隔离体图如图 7-21f 和 g 所示。

由 $\overline{M}_1$ 图可得，$r_{11}=20i+15i=35i$；由 $\overline{M}_2$ 图得 $r_{12}=r_{21}=\frac{15i}{2a}+\frac{5i}{a}=\frac{25i}{2a}$；由 M_P 图得 $R_{1P}=-2qa^2$。

r_{22} 和 R_{2P} 需由图 7-21e 和 g 所示隔离体的力矩平衡条件求出，图中示出的杆端剪力是根据相应的杆端弯矩算得的。为了使隔离体平衡方程中不出现杆件的未知轴力，可取隔离体对瞬时中心 O 的力矩平衡条件。由图 7-21e，取 $\sum M_O=0$，有

$$\frac{15i}{2a}+\frac{25i}{2a}+\frac{4i}{a^2}\times 10a-\frac{15i}{4a^2}\cdot a-r_{22}\times 3a-\frac{20i}{a}=0$$

得

$$r_{22}=\frac{145i}{12a^2}$$

由图 7-21g，取 $\sum M_O=0$，有

$$q\times 4a\times 2a-R_{2P}\times 3a-2qa^2=0$$

得

$$R_{2P}=2qa$$

将以上系数和自由项代入典型方程，则得位移法方程如下：

$$35iZ_1+\frac{25i}{2a}Z_2-2qa^2=0$$

$$\frac{25i}{2a}Z_1+\frac{145i}{12a^2}Z_2+2qa=0$$

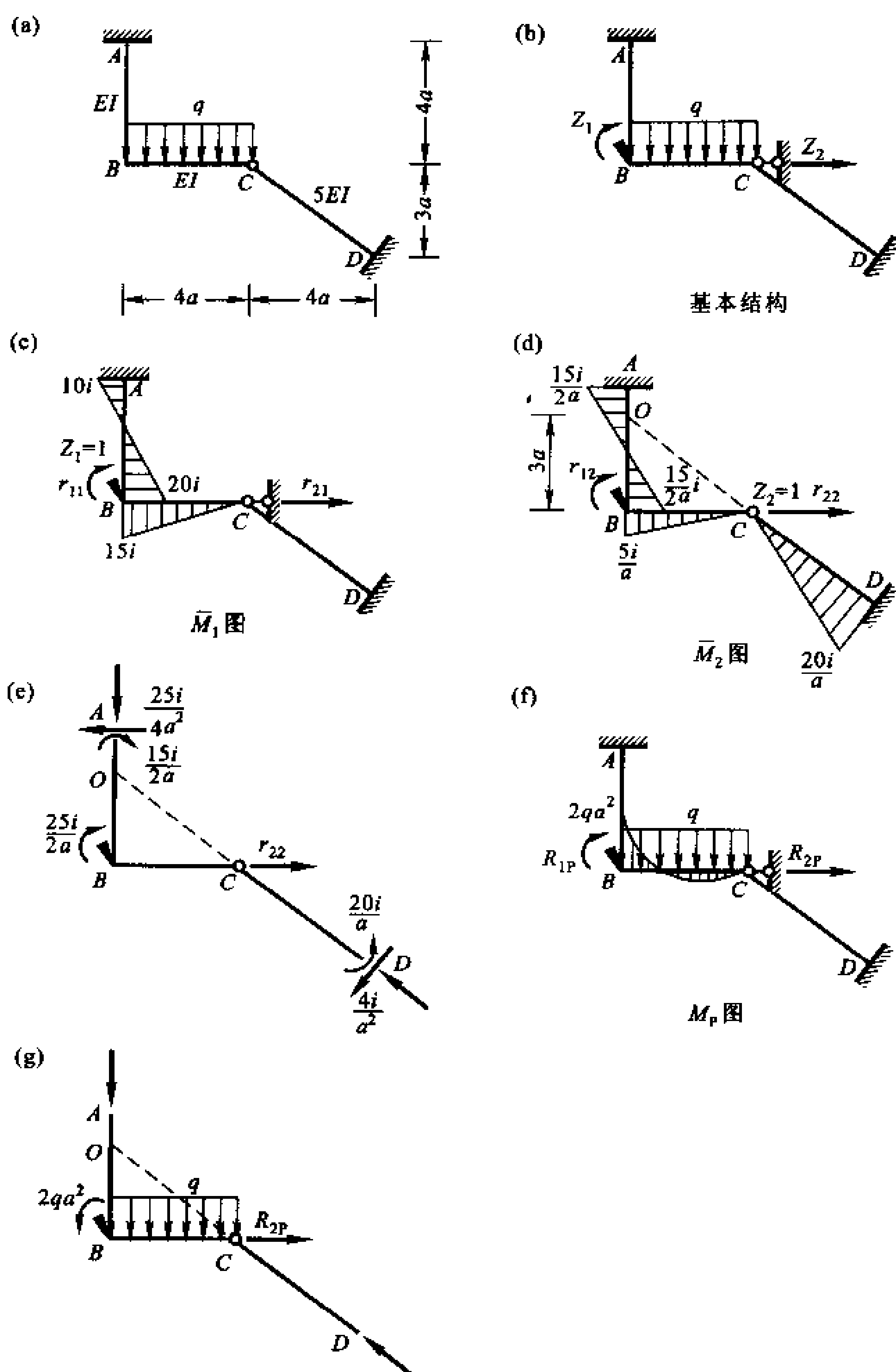


图 7-21

7-5-3 有剪力静定杆的刚架

图 7-22a 所示的刚架若按照一般的做法将有四个位移法基本未知量，包括 B、D 结点的两个角位移未知量和上、下两根横梁的水平线位移未知量。但由刚架的特点可以发现，其柱子的剪

力是静定的，即可以仅借助于平衡条件求得。显然，上层柱的剪力 $F_{QBD}=F_P$；下层柱的剪力 $F_{QAB}=2F_P$。此类刚架就称为有剪力静定杆的刚架。

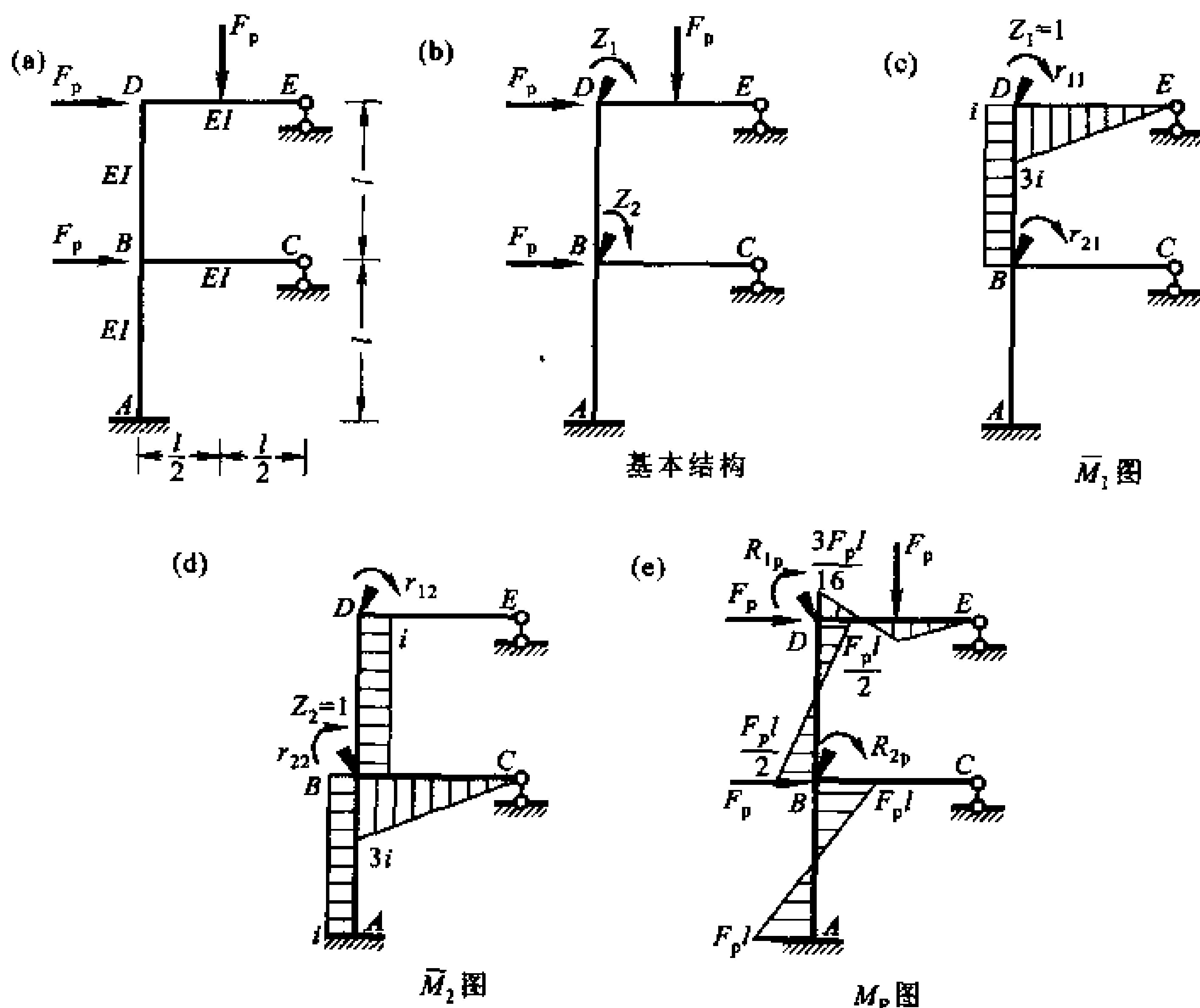


图　7-22

对于图7-22a所示的有剪力静定杆的刚架，实际上只有 D、B 结点的角位移是关键位移，即可以取图7-22b所示的位移法基本结构。那么，为何横梁 DE 和 BC 的水平线位移并非关键位移呢？这是因为这两个水平线位移对于计算杆端力来说不是必要的。当 D 结点发生单位角位移 $Z_1=1$ 时，由于横梁在水平方向可以自由滑动，柱子中无剪力存在，其受力状态相当于一端固定另一端为滑动支座的杆件，可作出 $\overline{M}_1$ 图如图7-22c所示。同理，可作出图7-22d的 $\overline{M}_2$ 图。由于柱子剪力静定，也容易画出荷载作用下的 M_P 图，如图7-22e所示。由此可见，横梁水平位移为未知并不影响单位弯矩图和荷载弯矩图的绘制。此后，位移法方程仍可按照 D、B 结点的力矩平衡条件建立。

由以上的分析可知，对于有剪力静定杆的刚架，位移法未知量的数目可以减少。但应当注意的是，由于横梁上无水平约束，可以自由滑移，柱子的受力和变形特点就相当于一端固定另一端为滑动支座的杆件，而不能再用两端固定杆的杆端力计算公式。在作出单位弯矩图和荷载弯矩图后，即可按照常规的方法建立位移法方程，并由此求出关键的未知位移。刚架的弯矩图仍可按照转角位移方程或叠加原理求得。

例7-6　试计算图7-23a所示刚架，并绘出弯矩图。设各杆的线刚度 i 相同。

解　该刚架的 AB 和 BC 柱均为剪力静定杆，仅需取 B、C 结点的角位移为位移法基本未知量，基本结构如图7-23b所示。在作单位弯矩图(图7-23c、d)和荷载弯矩图(图7-23e)时，应注意横梁在水平方向无约束，可

以自由滑动。由 C、B 结点的隔离体平衡条件可得

$$r_{11}=4i,\quad r_{12}=r_{21}=-i,\quad r_{22}=5i$$

$$R_{1P}=\frac{ql^2}{6},\quad R_{2P}=\frac{ql^2}{2}+\frac{ql^2}{3}-\frac{ql^2}{12}=\frac{3ql^2}{4}$$

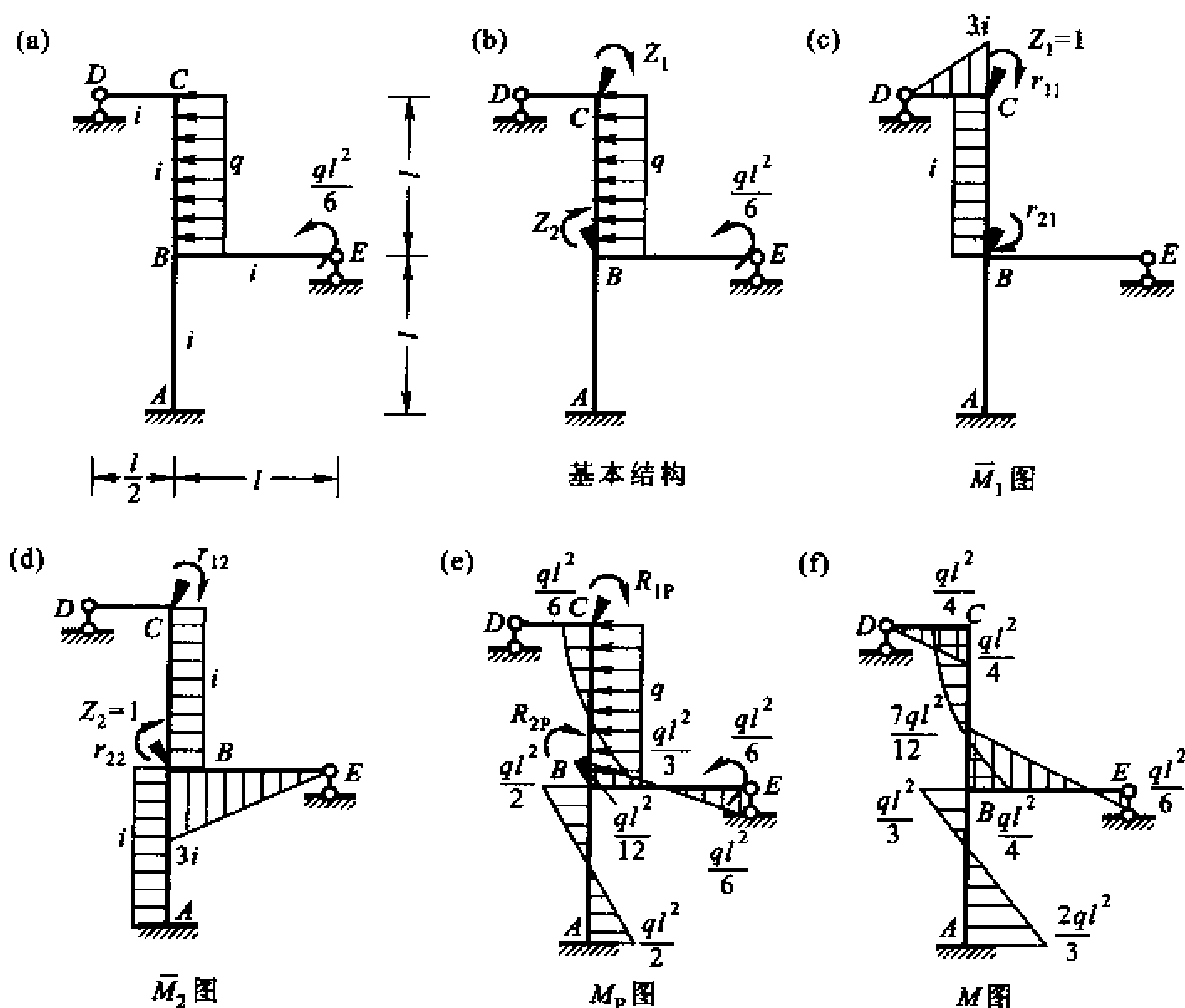


图 7－23

该刚架的 AB 和 BC 柱均为剪力静定杆，仅需取结点 B 和 C 的转角为位移法未知量，基本结构如图 7－23b 所示。在作单位弯矩图(图 7－23c、d)和荷载弯矩图(图 7－23e)时，应注意横梁在水平方向均无约束，可以自由滑动。由结点 C、B 的隔离体平衡条件可得

$$r_{11}=4i,\quad r_{12}=r_{21}=-i,\quad r_{22}=5i$$

$$R_{1P}=\frac{ql^2}{6},\quad R_{2P}=\frac{ql^2}{2}+\frac{ql^2}{3}-\frac{ql^2}{12}=\frac{3ql^2}{4}$$

据此列出位移法方程如下：

$$4iZ_1-iZ_2+\frac{ql^2}{6}=0$$

$$-iZ_1+5iZ_2+\frac{3ql^2}{4}=0$$

解得

$$Z_1=-\frac{ql^2}{12i},\quad Z_2=-\frac{ql^2}{6i}$$

由此可求得刚架各杆件的杆端弯矩，并作出刚架弯矩图如图 7－23f 所示。

7-5-4 超静定桁架

因为桁架结构受荷后杆件发生轴向变形,在考虑支座约束之前平面桁架的每一个结点均可以发生两个方向的独立线位移,所以在用位移法求解时,未知量的数目比较多。一般地说,超静定平面桁架的关键位移数就等于2倍的结点数减去支座约束数。桁架杆件的内力可根据其两端的位移,按照材料力学的原理求得。位移法典型方程可以根据未知位移方向上的结点平衡条件列出。

例7-7 试用位移法计算图7-24a所示正三角形桁架的内力。已知桁架各杆件 EA 相同。

解 该桁架有两个位移法基本未知量,基本结构如图7-24b所示。

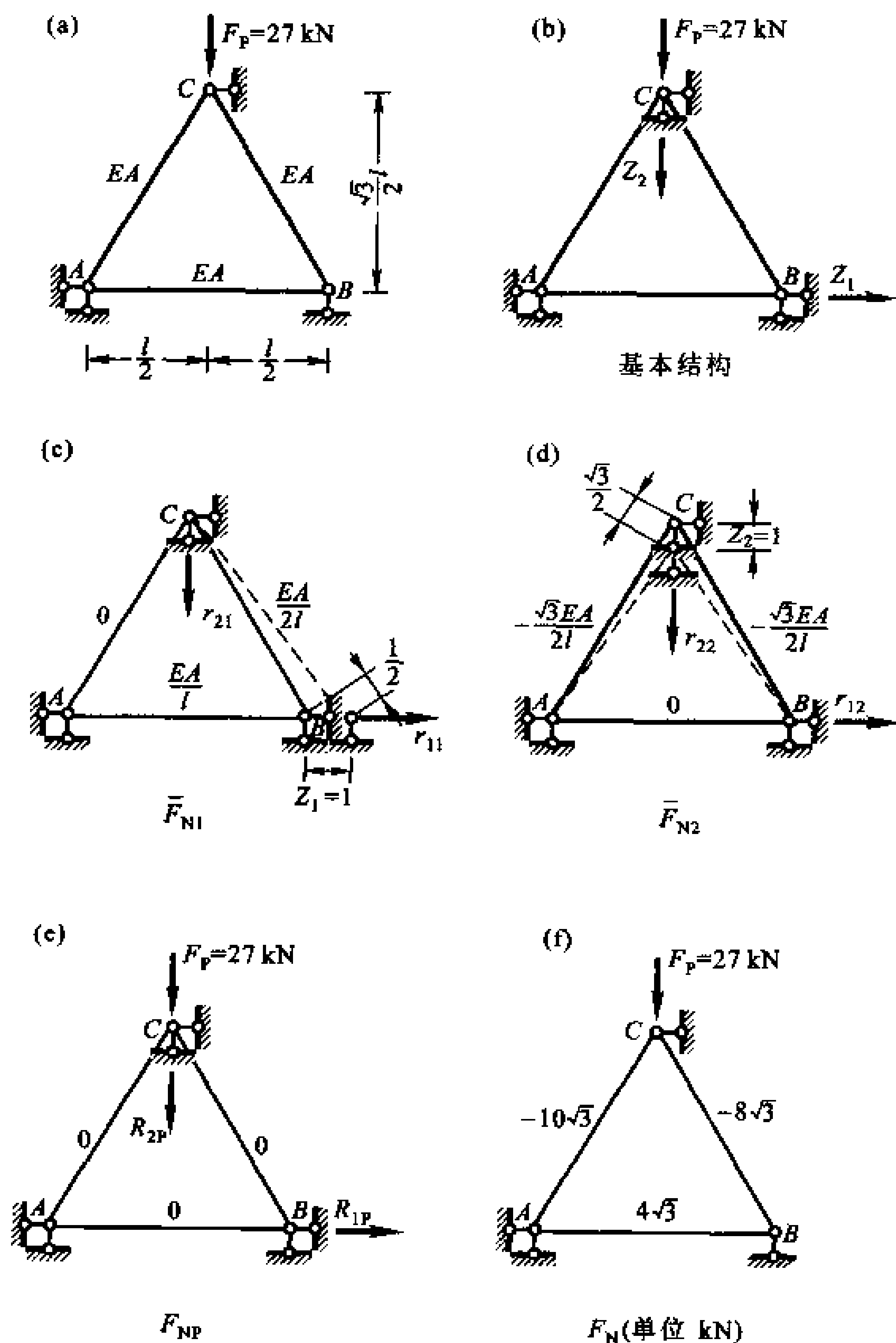


图 7-24

当 $Z_1=1$ 或 $Z_2=1$ 单独作用时，桁架各杆件长度的变化可根据几何条件求得，据此可求得单位轴力图和荷载轴力图如图 7-24c、d、e 所示。由铰 B 水平方向和铰 C 竖直方向力的平衡条件求得

$$r_{11}=\frac{EA}{l}+\frac{EA}{2l}\times\frac{1}{2}=\frac{5EA}{4l},\quad r_{12}=r_{21}=-\frac{EA}{2l}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}EA}{4l}$$

$$r_{22}=2\times\frac{\sqrt{3}EA}{2l}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3EA}{2l},\quad R_{1P}=0,\quad R_{2P}=-27\ \text{kN}$$

据此列出位移法方程如下：

$$\frac{5EA}{4l}Z_1-\frac{\sqrt{3}EA}{4l}Z_2=0$$

$$-\frac{\sqrt{3}EA}{4l}Z_1+\frac{3EA}{2l}Z_2-27\ \text{kN}=0$$

解得

$$Z_1=\frac{4\sqrt{3}l}{EA},\quad Z_2=\frac{20l}{EA}$$

由此求得桁架杆件的内力如图 7-24f 所示。

例 7-7 的桁架是一次超静定的，用力法求解仅需一个基本未知量。一般地说用位移法求解桁架结构时基本未知量的数目偏多，因此通常是在计算机求解时才被采用。

7-5-5　混合法

力法和位移法是求解超静定结构的两种基本方法，其选择应视结构的具体情况而定。例如，图 7-25a 所示刚架是五次超静定的，显然用位移法求解比较方便，此时只有横梁的水平线位移一个基本未知量；图 7-25b 所示刚架仅二次超静定的，但却有五个位移法基本未知量，显然宜采用力法求解。

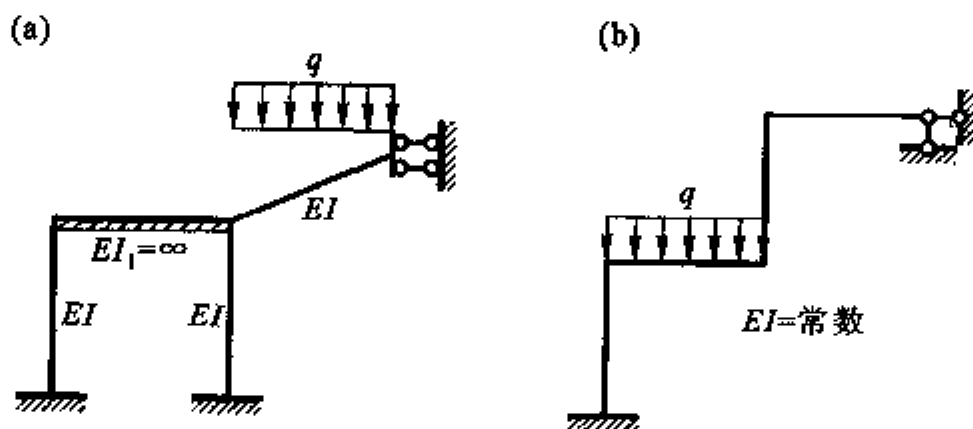


图　7-25

对于有一些超静定结构，用力法或位移法求解未知量均比较多，用混合法求解却未知量较少，可使计算大为简化。

所谓混合法是指同时取结构的内力和结点位移作为基本未知量，其原则是只要基本未知量被求得，所有杆件的内力均可迎刃而解。对于每一个未知内力，必定可以列出一个与之相应的变形协调方程；同样对于每一个未知结点位移，总可以列出一个与之相应的平衡方程。将上述方程联立，即构成了用混合法求解超静定结构的基本方程。求解基本方程可得各基本未知量，并可进而求得原结构的内力。

例7-8　试用恰当的方法求解图7-26a所示刚架，计算二力杆的轴力并绘制刚架的弯矩图。设AB杆为无限刚性，其余杆件EI相同。

解　本例若用力法或位移法求解均为四个未知量。现取E结点的角位移Z_1和二力杆CD的轴力Z_2为基本未知量用混合法求解，基本结构如图7-26b所示。显然，只要解得Z_1和Z_2，刚架所有杆件的内力均可迎刃而解。

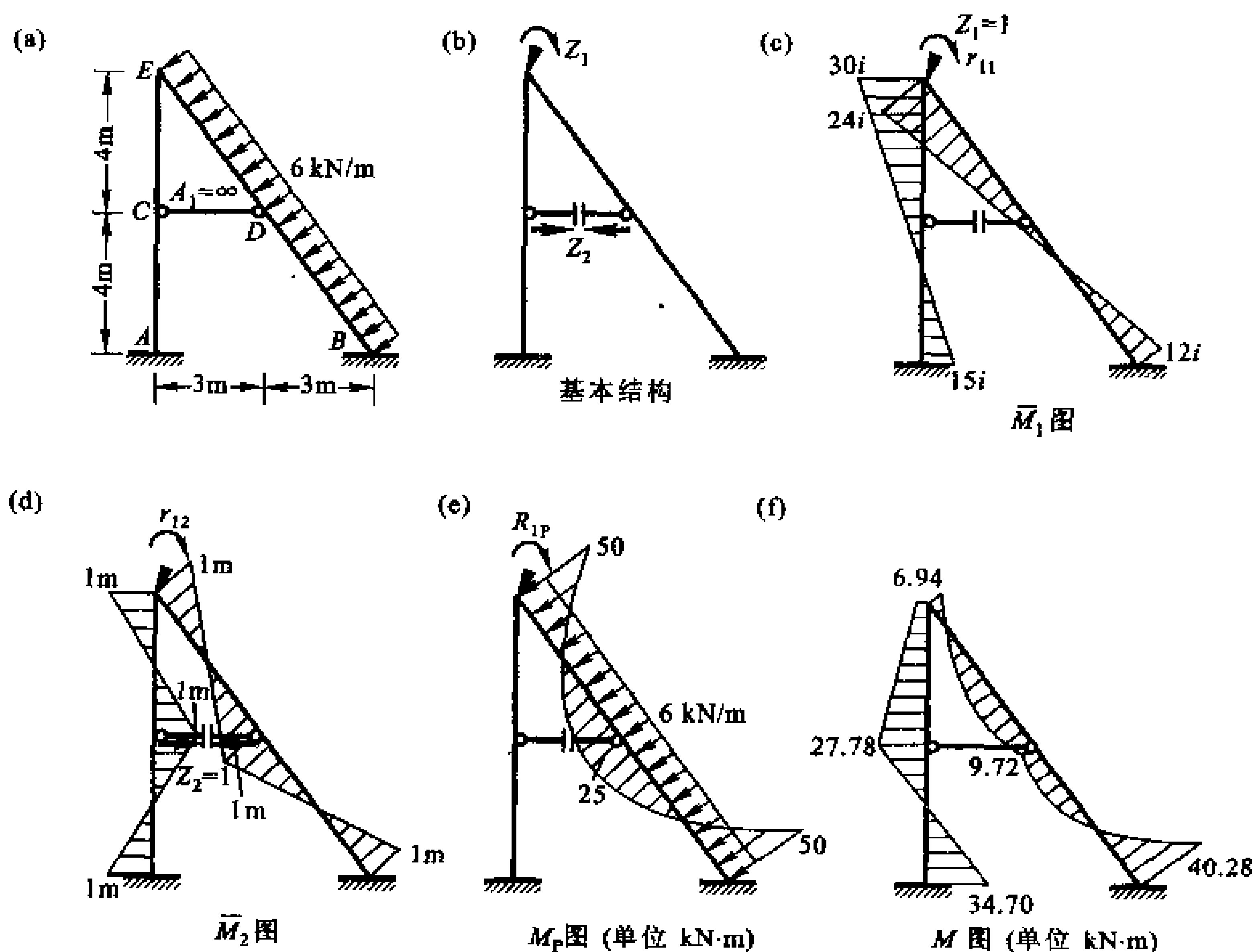


图　7-26

设$i=\frac{EI}{60}\mathrm{m}^{-1}$，先可作出$Z_1=1$单独作用时的$\overline{M}_1$图(图7-26c)，再作出$Z_2=1$单独作用时的$\overline{M}_2$图和$M_P$图(图7-26d、e)。为使基本结构符合于原结构，要求E结点处刚臂中的约束力矩和CD杆断口处的相对位移均为零，于是可列出以下基本方程

$$r_{11}Z_1+r_{12}Z_2+R_{1P}=0$$
$$\delta_{21}Z_1+\delta_{22}Z_2+\Delta_{2P}=0$$

根据以上单位弯矩图和荷载弯矩图可得

$$r_{11}=30i+24i=54i,\quad r_{12}=0,\quad R_{1P}=-50\ \mathrm{kN\cdot m}$$

第二个方程中的系数和自由项可利用图乘法求得，分别为

$$\delta_{22}=\frac{18}{3EI}\ \mathrm{m}^3,\quad \delta_{21}=-r_{12}=0,\quad \Delta_{2P}=\frac{125}{EI}\ \mathrm{kN\cdot m}^3$$

由于方程的副系数为零，基本方程成为两个不相关的独立方程。代人以上系数和自由项后可解得

$$Z_1=\frac{25}{27i}\ \mathrm{kN\cdot m},\quad Z_2=-\frac{375}{18}\ \mathrm{kN}$$

并进而可求得刚架的弯矩图如图 7－26f 所示。

§7－6 对称性的利用

在力法中已经介绍了对称结构的定义，对称结构在对称或反对称荷载作用下的基本受力特性，以及对称性利用方面的基本做法等。本节中主要结合具体问题，介绍在位移法中如何利用对称性简化结构的计算。

例 7－9 试计算图 7－27a 所示刚架，并绘制弯矩图。设各杆 EI＝常数。

解 本例为对称刚架受反对称荷载作用。因此，位于对称轴上的 GH 杆和 EF 杆的轴力为零，在取半边结构时，在对称轴位置处应设置竖向链杆支座，得如图 7－27b 所示的计算简图。由于 AC 杆的剪力是静定的，横梁的水平位移并非关键位移，当用位移法求解时仅有 C 结点的转角一个未知量，基本结构如图 7－27c 所示。根据附加刚臂处约束力矩等于零的平衡条件可建立位移法方程

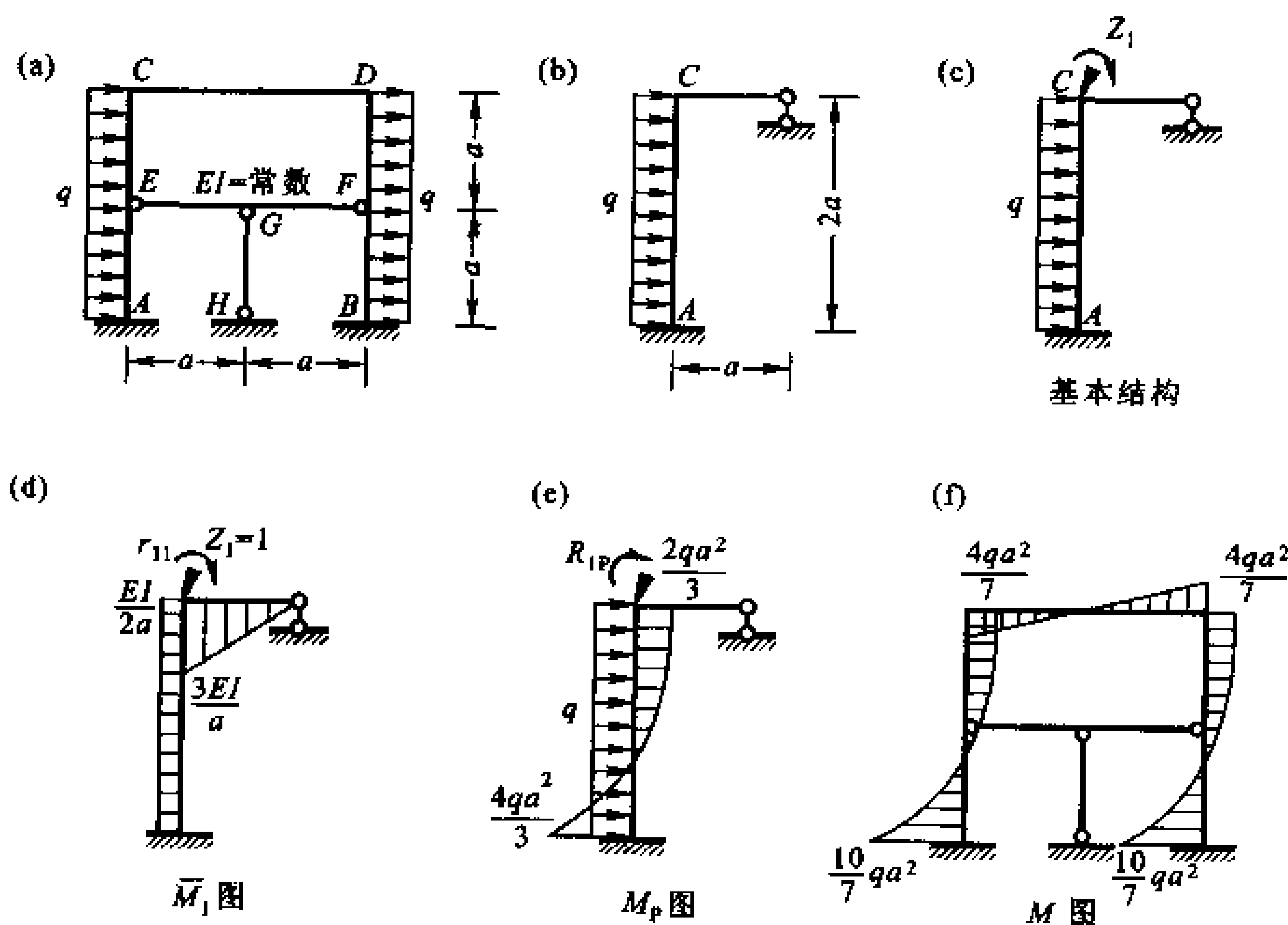


图 7－27

$$r_{11}Z_1+R_{1P}=0$$

在绘制 $\overline{M}_1$ 和 M_P 图时，需注意 AC 杆的 C 端沿水平方向可以自由滑移，应作为一端固定另一端滑动支座的情况考虑，单位弯矩图和荷载弯矩图分别示于图 7－27d、e。由此可求得

$$r_{11}=\frac{3EI}{a}+\frac{EI}{2a}=\frac{7EI}{2a},\quad R_{1P}=-\frac{2qa^2}{3}$$

代入位移法方程，可解得

$$Z_1=\frac{4qa^3}{21EI}$$

以下可以利用转角位移方程或叠加法先求得半边结构的弯矩图，然后再根据反对称的原则绘出刚架的弯矩

图,如图7－27f所示。

例7－10　试计算图7－28a所示刚架,并绘制弯矩图。

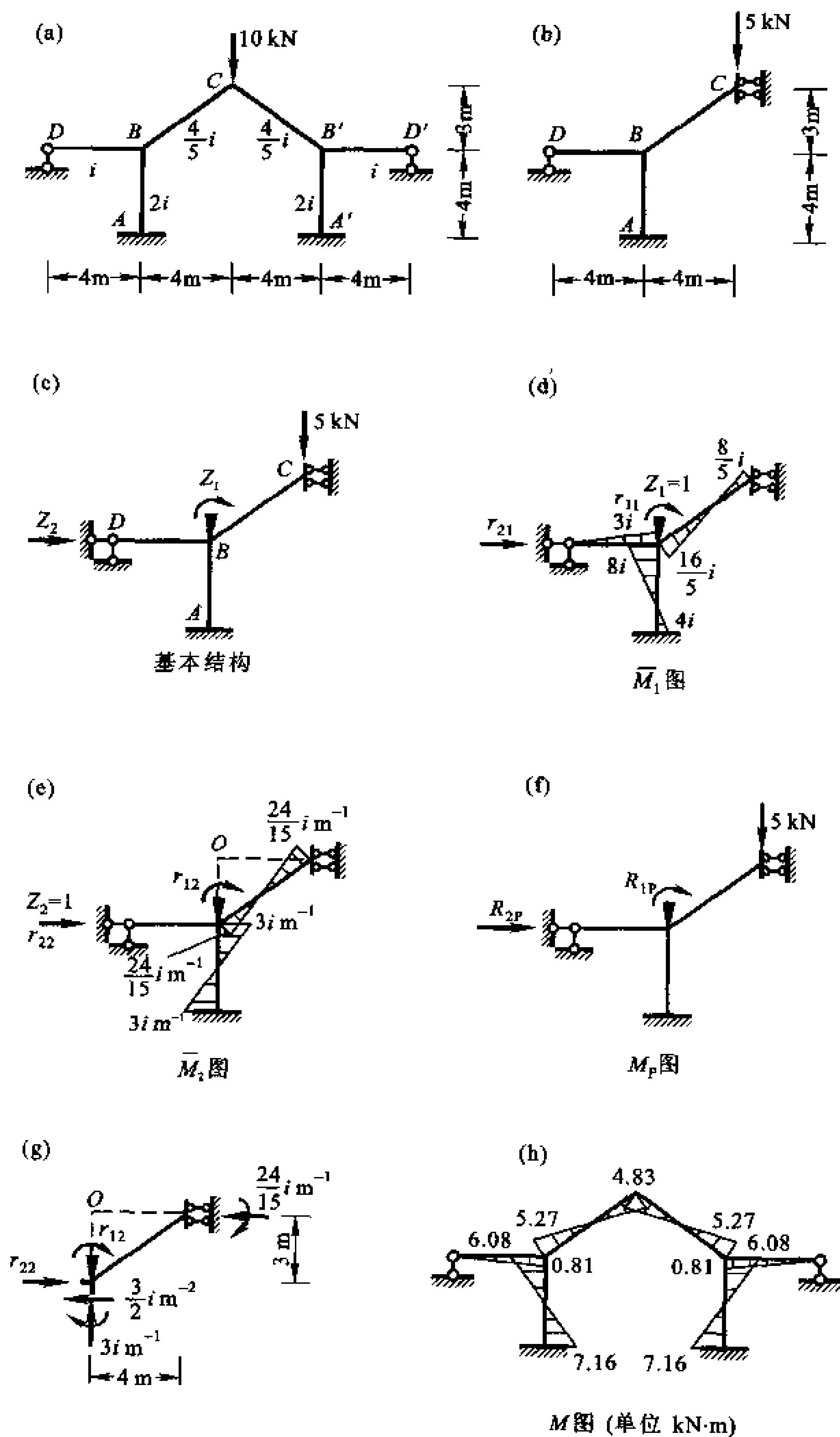


图　7－28

解 此刚架为对称结构受对称荷载作用，在取半边结构计算时，应在 C 结点处设置滑动支座，并在 C 结点上作用原荷载一半的竖向荷载，如图 7-28b 所示。此时，位移法基本结构如图 7-28c，基本未知量为结点角位移 Z_1 和线位移 Z_2，而 C 结点的竖向位移与 Z_2 是属于牵连位移。根据两附加约束反力等于零的平衡条件，可建立如下位移法方程

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0$$
$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0$$

为了计算上述方程中的系数和自由项，需作出 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$ 和 M_P 图，分别示于图 7-28d、e 和 f。在作 $\overline{M}_1$ 图时应注意，由于 C 结点滑动支座的链杆与杆件本身不在同一方向，当 B 结点发生转角时 C 结点不可能发生竖向位移，所以 BC 杆的内力与两端固定时完全相同；在作 $\overline{M}_2$ 图时，可利用瞬时中心确定 BC 杆的弦转角 $\beta_{BC} = -\frac{Z_2}{3}\ \mathrm{m}^{-1}$。为求得 r_{22}，可作出 $\overline{M}_2$ 图中斜杆的隔离体图，如图 7-28g 所示。由以上 $\overline{M}_1$ 和 $\overline{M}_2$ 图可得

$$r_{11} = 3i + 8i + \frac{16}{5}i = \frac{71}{5}i,\quad r_{12} = r_{21} = -3i\ \mathrm{m}^{-1} + \frac{24}{15}i\ \mathrm{m}^{-1} = -\frac{21}{15}i\ \mathrm{m}^{-1}$$

根据图 7-28g 的隔离体对于瞬时中心 O 取矩应等于零的力矩平衡条件，并注意到 $r_{12} = -\frac{21}{15}i\ \mathrm{m}^{-1}$，可列出方程

$$\frac{3}{2}i\ \mathrm{m}^{-2} \times 3\ \mathrm{m} + 3i\ \mathrm{m}^{-1} + \frac{24}{15}i\ \mathrm{m}^{-1} + \frac{21}{15}i\ \mathrm{m}^{-1} - r_{22} \times 3\ \mathrm{m} = 0$$

由此可求得

$$r_{22} = \frac{77}{30}i\ \mathrm{m}^{-1}$$

从 M_P 图中可以看出，附加约束存在时，结点荷载作用不会引起杆件弯矩，此时杆件的轴力与将刚结处均改为铰结所形成的相应桁架体系的轴力相同。根据以上分析可得

$$R_{1P} = 0,\quad R_{2P} = \frac{20}{3}\ \mathrm{kN}$$

将以上系数和自由项代入位移法方程，并联立求解得

$$Z_1 = -\frac{0.26}{i}\ \mathrm{kN\cdot m},\quad Z_2 = -\frac{2.74}{i}\ \mathrm{kN\cdot m^2}$$

最后可按转角位移方程或叠加法求出各杆端弯矩，并作出 M 图，如图 7-28h 所示。

在取半边结构的计算简图时，应充分注意其受力特性，包括半边结构的变形和内力是否与原结构中该部分的情况完全一致。例如，对于图 7-29a 所示的简支等腰三角形刚架，采用图 7-29b 所示的计算简图时弯矩的图形将与原结构中相同，但此时水平杆的轴力为零，与原结构的情况不相符合。所以，计算简图中应撤除支座 A 的水平链杆，取如图 7-29c 所示的半边结构。实际上，此刚架由于 A、B 两支座情况不同，已不能称为对称结构，也不完全符合对称结构的受力特性。例如，当考虑杆件的轴向变形时，在图示对称荷载作用下 C 结点将产生反对称的水平位

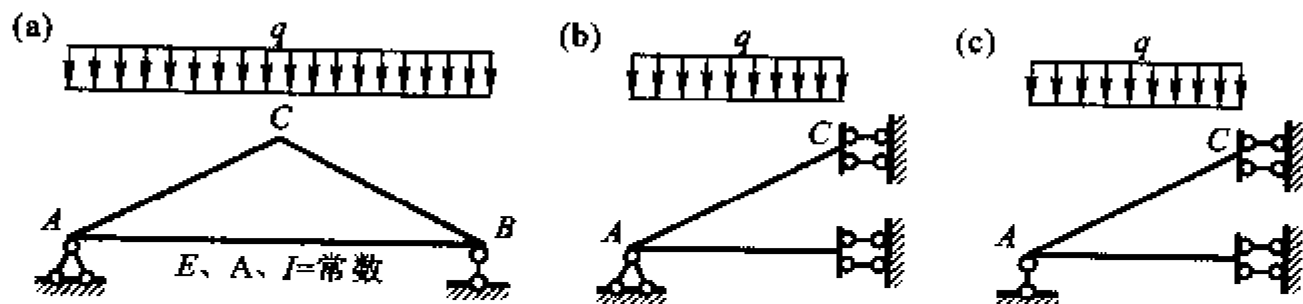


图 7-29

移。但因 A 支座处的水平反力为零，在作内力分析时，仍然可以采用图 7－29c 半边结构的计算简图。

§7－7 支座位移、温度变化等作用下的位移法计算

在第 6 章中已经指出，支座位移、温度变化等非荷载因素一般会使超静定结构产生内力。当用位移法分析时，基本原理及解题步骤仍与在荷载作用时相同，只是位移法方程中的自由项是由支座位移、温度变化等作用所引起的基本结构中的附加约束反力。此时，位移法方程的物理含义是：附加约束在各关键位移和非荷因素共同作用下的约束反力应等于零。由于附加约束实际上是不存在的，根据解的惟一性定理，能使附加约束反力全部为零的关键位移，也就是结构的真实位移。

7－7－1 支座位移作用

在计算支座位移作用下，具有 n 个基本未知量结构的位移法方程中第 i 个方程的一般形式可写为

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij}Z_j + R_{ic} = 0 \tag{7-11}$$

式中 r_{ij} 仍表示由单位位移所引起的附加约束反力，即刚度系数；R_{ic} 则表示基本结构由于支座位移作用引起的附加约束反力，以上均以与所设基本未知位移方向一致时为正，反之，则为负。

系数 r_{ij} 的计算与荷载作用时相同；梁和刚架结构的 R_{ic} 可由支座位移引起的基本结构弯矩图（M_c 图），根据结点或截面的平衡条件求得。将上述系数和自由项代入位移法方程，经联立求解可得各关键位移，然后可按照转角位移方程或叠加法求得各杆端弯矩，并进而绘制结构的弯矩图。

例 7－11 试计算图 7－30a 所示支座位移作用下的刚架，并绘制弯矩图。

解 此刚架属于对称结构，在分析时为利用其对称性，可以将支座位移分解为一组对称位移（图 7－30b）和另一组反对称位移（图 7－30c）。在对称支座位移作用下，刚架仅发生向下的刚体位移，并无内力产生；在反对称支座位移作用下，可取半边结构的计算简图（图 7－30d），考虑 AC 杆是剪力静定的，基本结构如图 7－30e 所示。相应的位移法方程为

$$r_{11}Z_1 + R_{1c} = 0$$

由 $\overline{M}_1$ 和 M_c 图可以求出方程的系数和自由项为

$$r_{11} = 12i + i = 13i, \quad R_{1c} = 0.024i$$

代入位移法方程，可解得

$$Z_1 = -1.846 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

然后，可利用转角位移方程或叠加法求得刚架的弯矩图，如图 7－30h 所示。

例 7－11 说明了以下基本概念：

(1) 在支座位移作用下超静定结构的内力不仅与杆件刚度之间的相对值有关，而且与杆件刚度的绝对值成正比。

(2) 当结构对称时，非荷载因素的作用同样也可以分解为对称作用与反对称作用的叠加，这样就同样可以利用对称性进行求解。

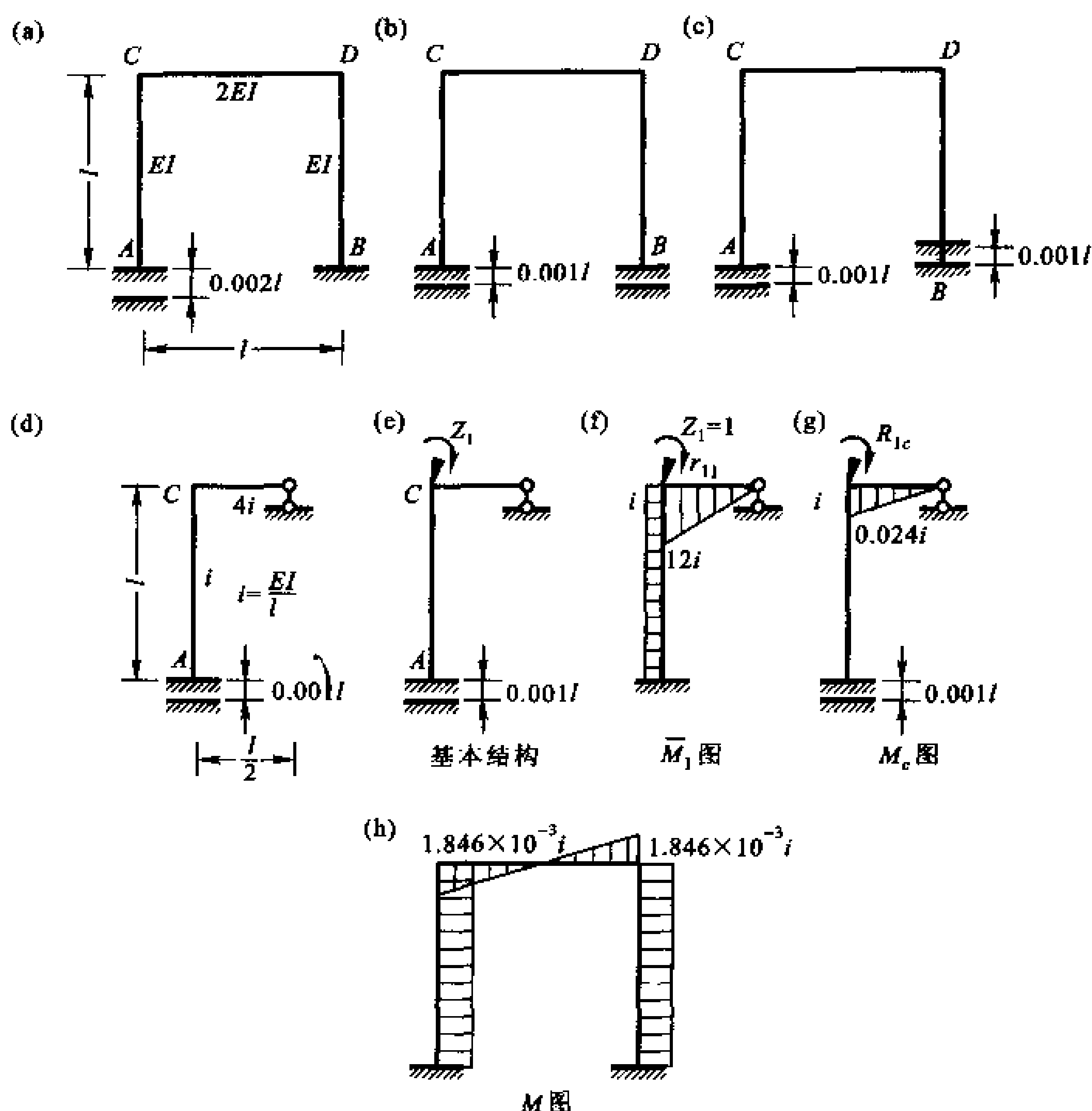


图　7-30

7-7-2　温度变化作用

在温度变化作用下，具有 n 个基本未知量结构的位移法方程中第 i 个方程的一般形式可写为

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij}Z_j + R_{it} = 0 \qquad (7-12)$$

式中 r_{ij} 仍为一般位移法中的刚度系数；R_{it} 则表示基本结构由于温度变化作用引起的附加约束反力，以上均以与所设基本未知位移方向一致时为正，反之，则为负。

温度变化作用对于杆件变形的影响可以分解成两部分：一部分是杆件轴线处的温度变化 t_0，它是沿杆件截面高度相同的温度变化，使杆件产生伸长或缩短；另一部分是杆件两侧表面温度变化的差值 Δt，设为是沿杆件截面高度线性变化且在形心轴处等于零的温度变化，使杆件产生弯曲变形。上述温度变化除会引起位移法基本结构的内力外，也都会引起基本结构中的附加约束反力 R_{it}。在求 R_{it} 时，可以将上述两部分因素单独考虑，分别求出其各自的附加约束反力

R'_{it} 和 R''_{it}，然后再行叠加。超静定结构的最终变形，是上述温度影响以及由此所引起的结构内力共同作用的结果。

为了便于计算位移法中的附加约束反力，表 7－2 中列出了用力法求得的三类基本的超静定杆件，在温度变化 Δt 作用下的杆端弯矩和剪力。

表 7－2　等截面超静定杆由温度变化 Δt 引起的杆端弯矩和剪力

编号	杆件的简图	弯矩		剪力	
		M_{AB}	M_{BA}	F_{QAB}	F_{QBA}
1	A, B; $\Delta t=t_2-t_1$; t_1; $t_2>t_1$; l	$-\dfrac{EI\alpha\Delta t}{h}$ （h 为截面高度）	$\dfrac{EI\alpha\Delta t}{h}$	0	0
2	A, B; t_1; $t_2>t_1$; l	$-\dfrac{3EI\alpha\Delta t}{2h}$	0	$\dfrac{3EI\alpha\Delta t}{2hl}$	$\dfrac{3EI\alpha\Delta t}{2hl}$
3	A, B; t_1; $t_2>t_1$; l	$-\dfrac{EI\alpha\Delta t}{h}$	$\dfrac{EI\alpha\Delta t}{h}$	0	0

例 7－12　试求图 7－31a 所示单层工业厂房纵向排架由于温度均匀升高 t 所引起的柱弯矩。设各柱的截

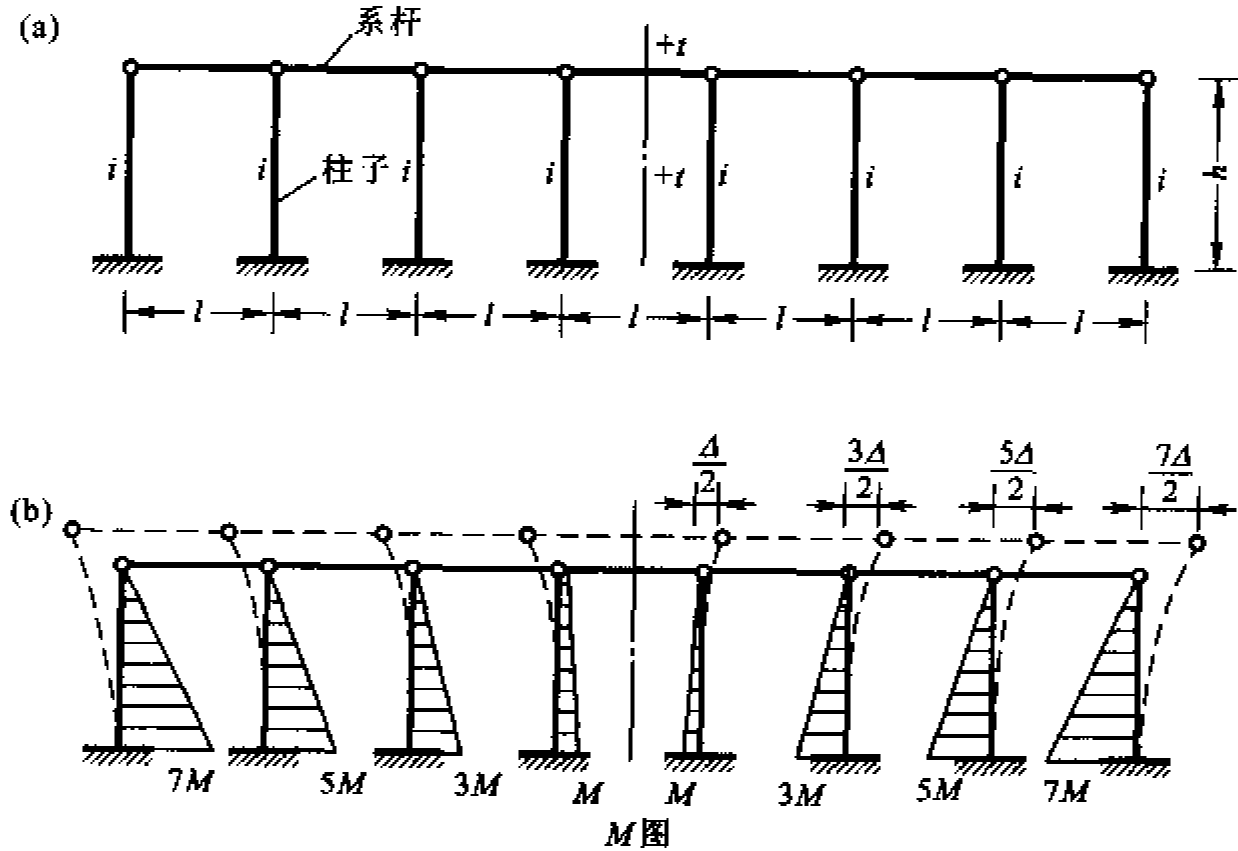


图　7－31

面相同，各纵向水平系杆的截面也相同，材料的线膨胀系数为 α。忽略因内力引起的系杆轴向变形。

解　此纵向排架为对称结构，受对称的温度变化作用，温度均匀升高 t 时排架的变形如图 7-31b 中虚线所示。温度升高时柱子的伸长因未受到约束，所以不会引起内力；系杆的伸长会使柱顶产生水平位移，从而引起柱子的弯矩和剪力，并在系杆内引起轴力。设柱间每一系杆的伸长量为 Δ，则在忽略引内力引起的轴向变形时有

$$\Delta = \alpha t l$$

因变形是对称的，离对称轴愈远的柱子柱顶水平位移和柱内弯矩数值就愈大。以最靠近对称轴的两柱为例，柱底弯矩的数值为

$$M = 3i \times \frac{\Delta}{2h} = \frac{3i\alpha tl}{2h}$$

其余柱子的弯矩将按柱顶水平位移的比值增大，如图 7-31b 所示。

由例 7-12 的分析可以了解以下在结构设计中有用的基本概念：

(1) 结构沿某一方向上长度愈大，温度变化所引起的结构变形和内力一般也就愈大。为了限制温度变化引起的内力，有关设计规范对各类结构物的长度分别规定了限值。当结构物超长时，可以通过设置温度缝将其分为若干独立的部分，从而减小温度变化所引起的变形和内力。

(2) 为了提高厂房排架的纵向承载能力和刚度，一般需在纵向某一柱间设置柱间支撑，如图 7-32 所示。此时，应将柱间支撑布置在靠近中部的柱间，这样对于减小柱子因温度变化引起的内力，以及减小柱间支撑本身的内力都是有利的。同理，对于框架-剪力墙结构体系来说，为了减小温度应力，纵向剪力墙一般也宜布置在靠近建筑物中部位置，而不宜布置在建筑物的两端。

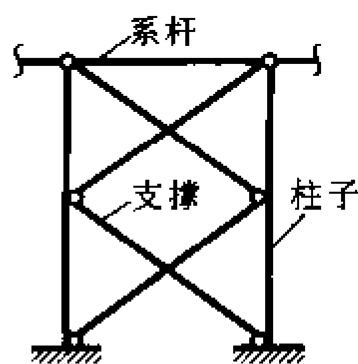


图　7-32

例 7-13　试用位移法计算图 7-33a 所示在温度变化作用下的门式刚架，并绘制 M 图。设刚架外侧温度升高 40℃，内侧升高 20℃；各杆均为矩形截面，EI = 常数，截面高度 $h = l/10$；材料的线膨胀系数为 α。

解　此刚架可以利用对称性，取图 7-33b 所示半边结构进行分析，并设 $i = \frac{2EI}{l}$。温度升高时杆件伸长引起的 C 结点线位移可以由已知条件所确定的，所以只有 C 结点的角位移一个位移法基本未知量，基本结构如图 7-33c 所示。此时，位移法方程为

$$r_{11} Z_1 + R'_{1t} + R''_{1t} = 0$$

式中 R'_{1t}表示由平均温度变化 t_0 引起的附加刚臂约束反力；R''_{1t}表示由内、外温差 Δt 引起的附加约束反力。根据已知条件有

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2} = 30\ ℃,\quad \Delta t = t_1 - t_2 = 20\ ℃$$

由图 7-33d 所示的 $\bar{M}_1$ 图可得，$r_{11} = 4i + i = 5i$。由平均温度升高 t_0 所引起杆件的伸长量 $\Delta = \alpha l t_0$，据此可得由此引起的杆件变形和固端弯矩 M'_t，如图 7-33e 所示；由内、外温差 Δt 可查表 7-2 求得相应的固端弯矩 M''_t，如图 7-33f 所示。于是，有

$$R'_{1t} = 180\alpha i,\quad R''_{1t} = 0$$

将以上系数和自由项代入位移法方程，可解得 C 结点的角位移

$$Z_1 = -36\alpha$$

利用叠加法可求出半刚架的弯矩图形，再按照对称的原则绘制刚架弯矩图如图 7-33g 所示。

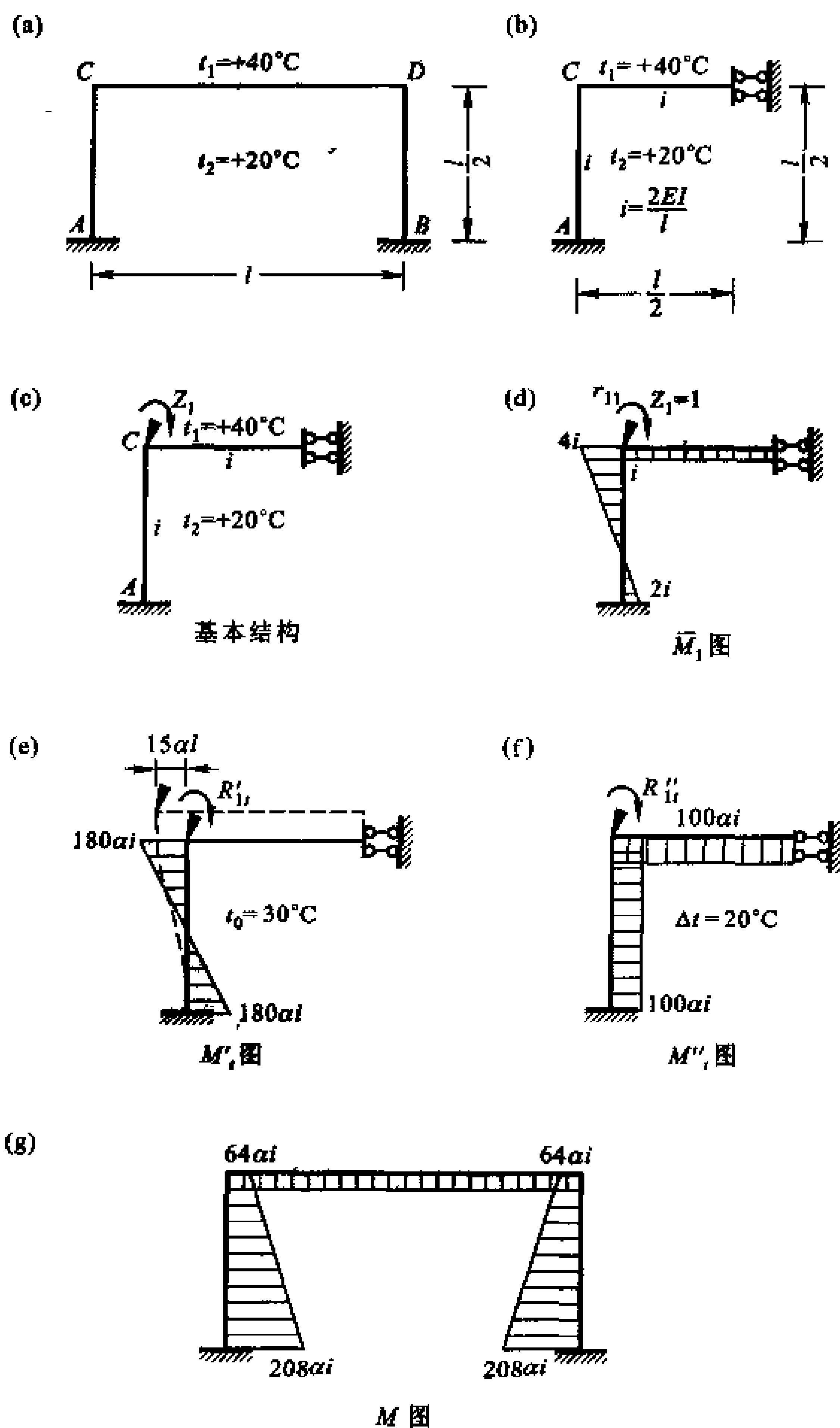
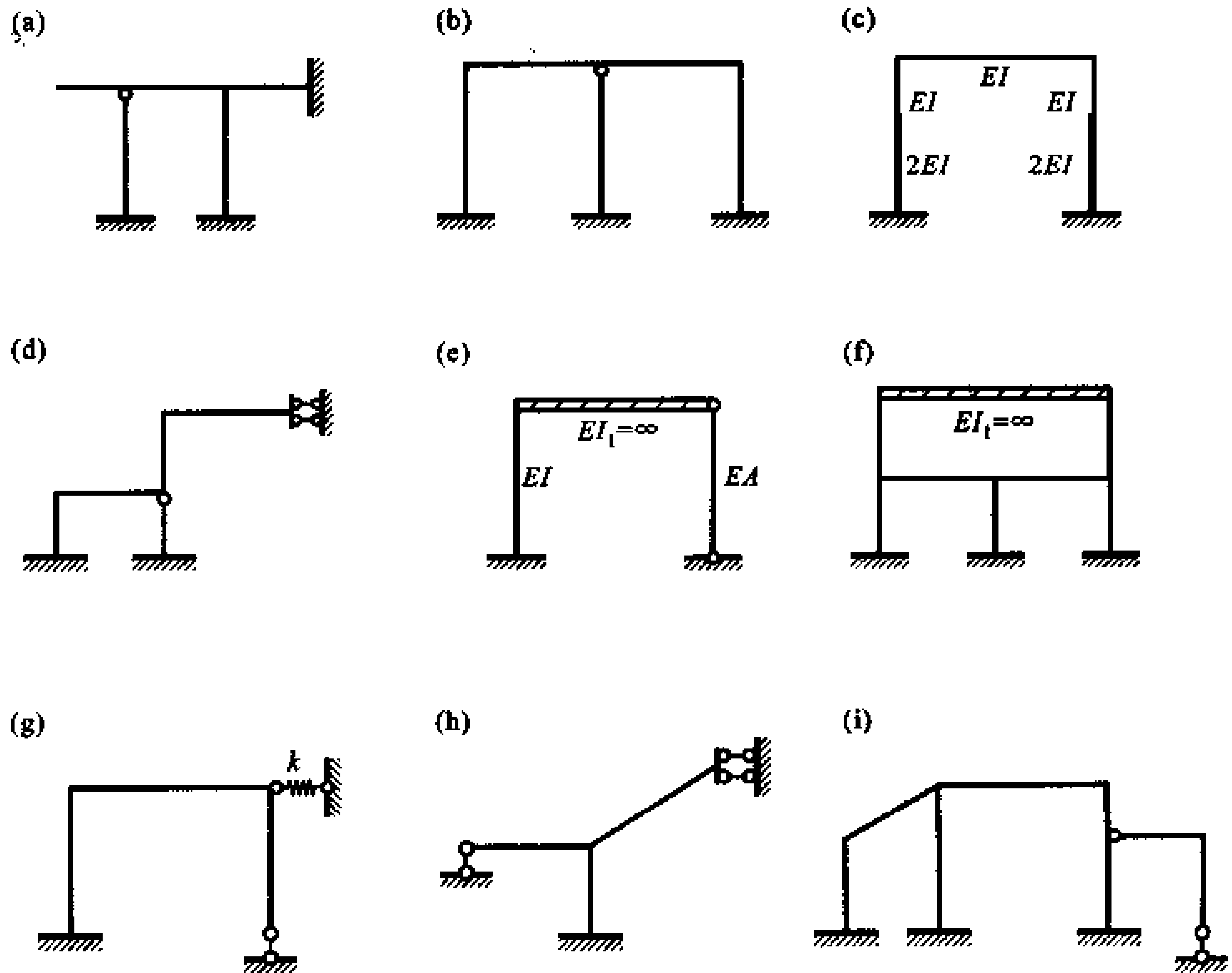


图 7-33

习 题

7-1 试确定图示结构的位移法基本未知量数目，并画出基本结构。

7-2 试回答位移法基本未知量选取的原则是什么？为何将这些基本未知位移称为关键位移？是否可以将静定部分的结点位移也选作位移法未知量？

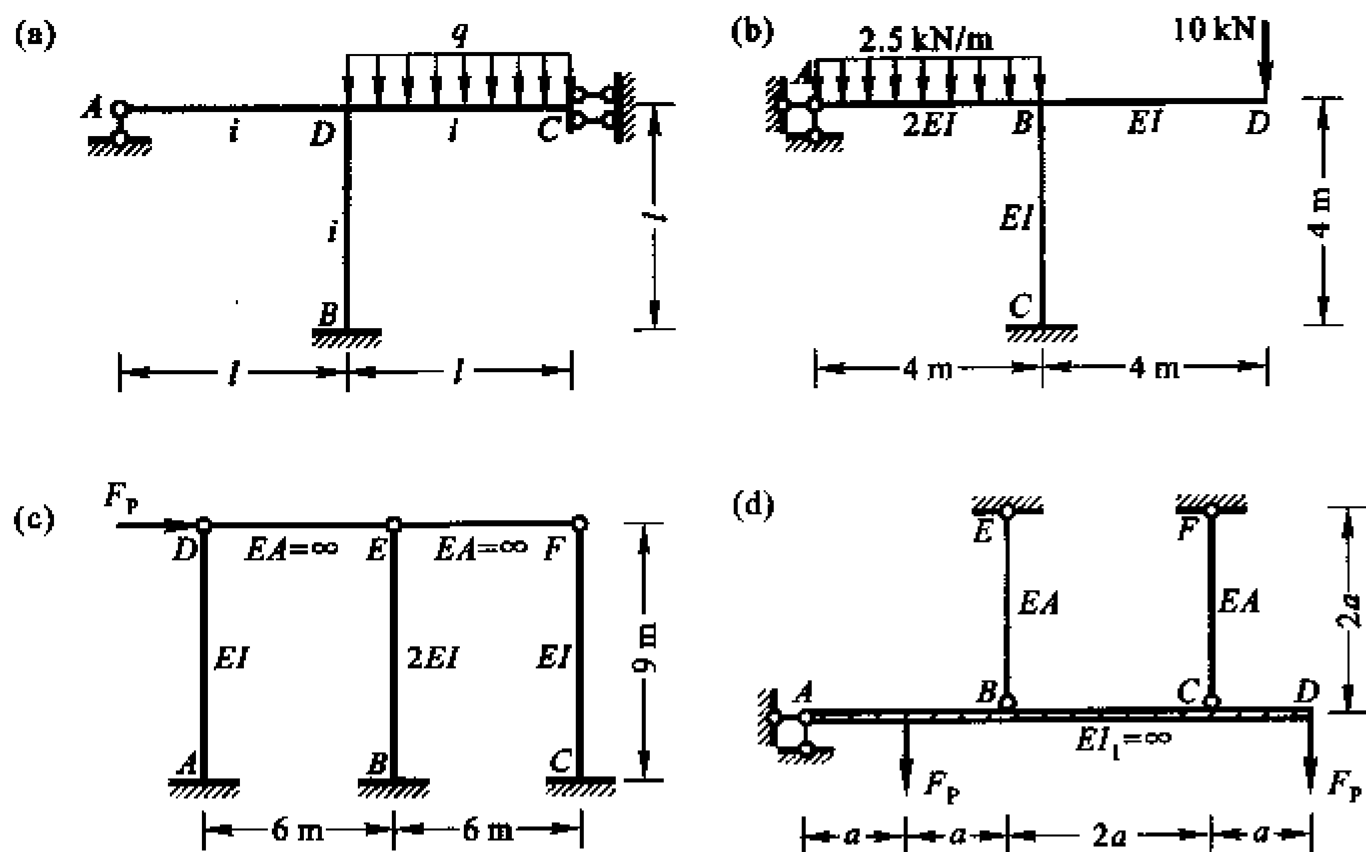


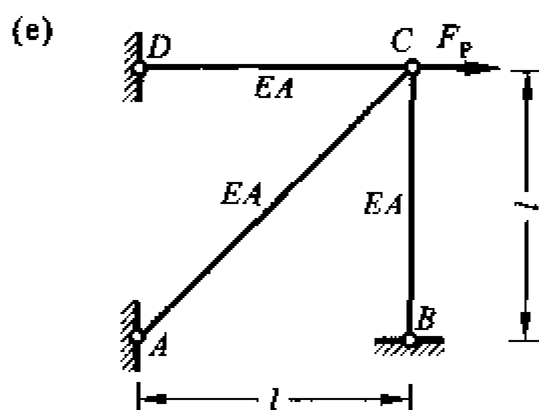
题 7－1 图

7－3　试说明位移法方程的物理意义，并说明位移法中是如何运用变形协调条件的。

7－4　试说明若考虑刚架杆件的轴向变形，位移法基本未知量的数目有无变化？如何变化？

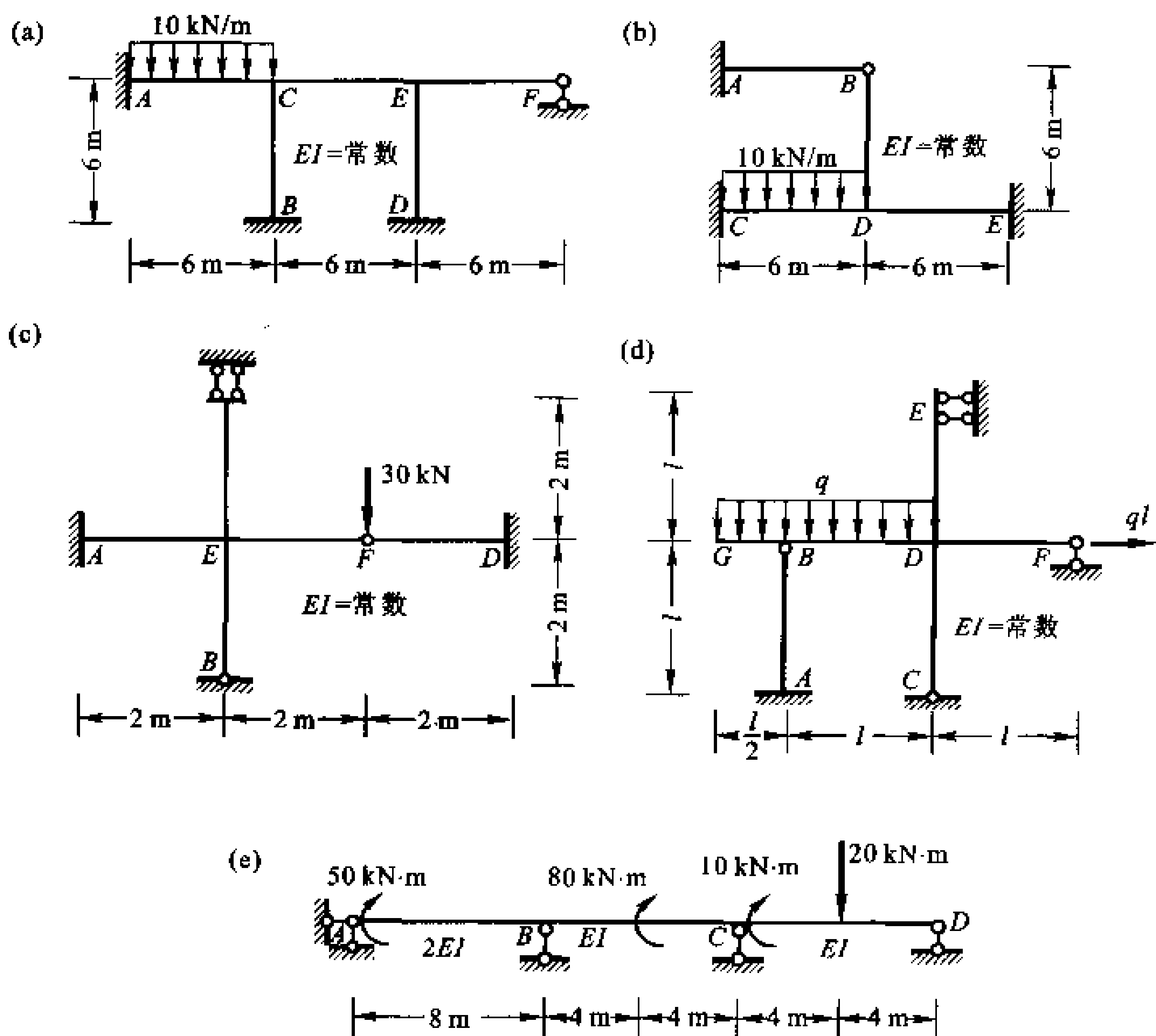
7－5　试用位移法计算图示结构，并绘制其内力图。





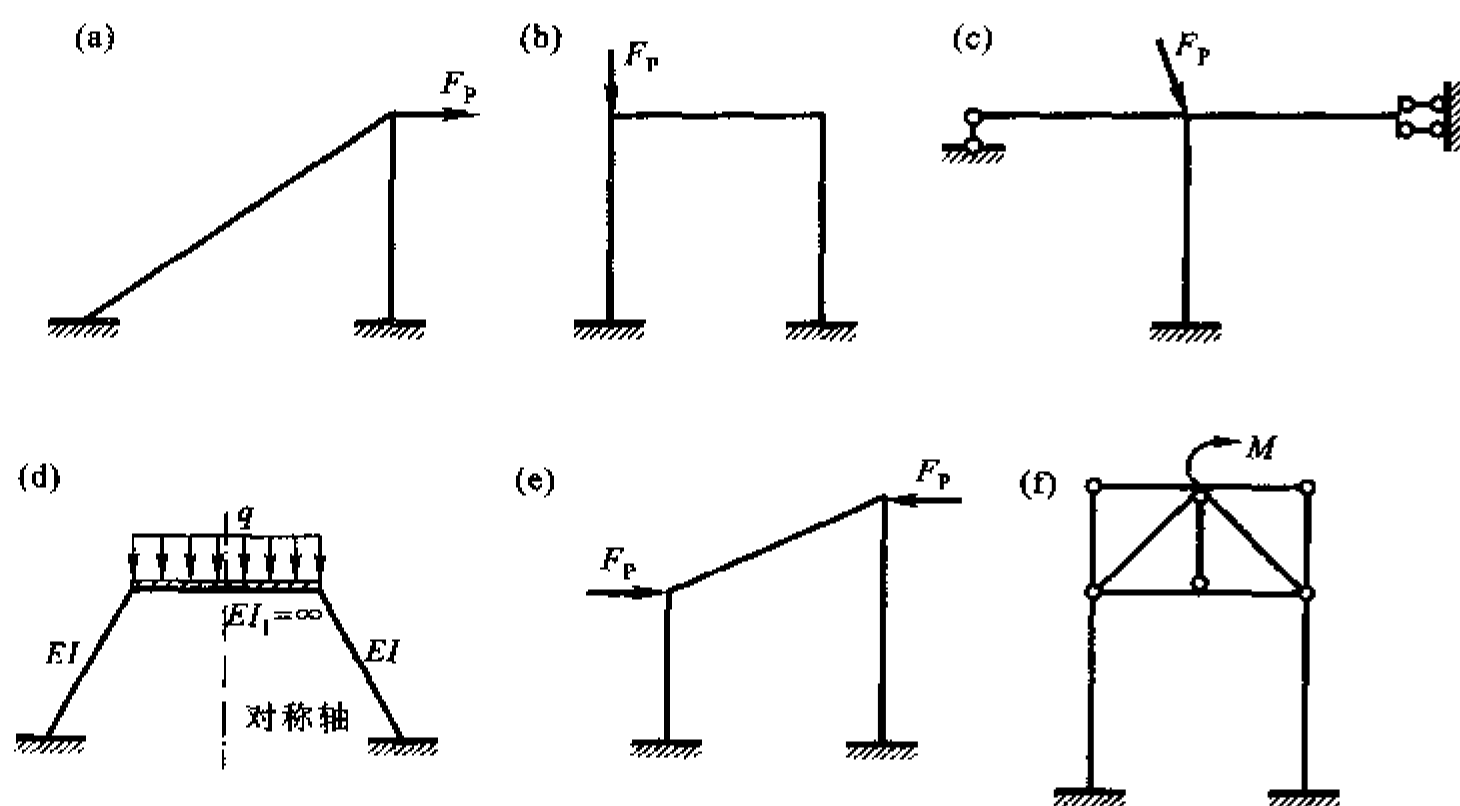
题 7-5 图

7-6 试用位移法计算图示结构，并绘出 M 图。



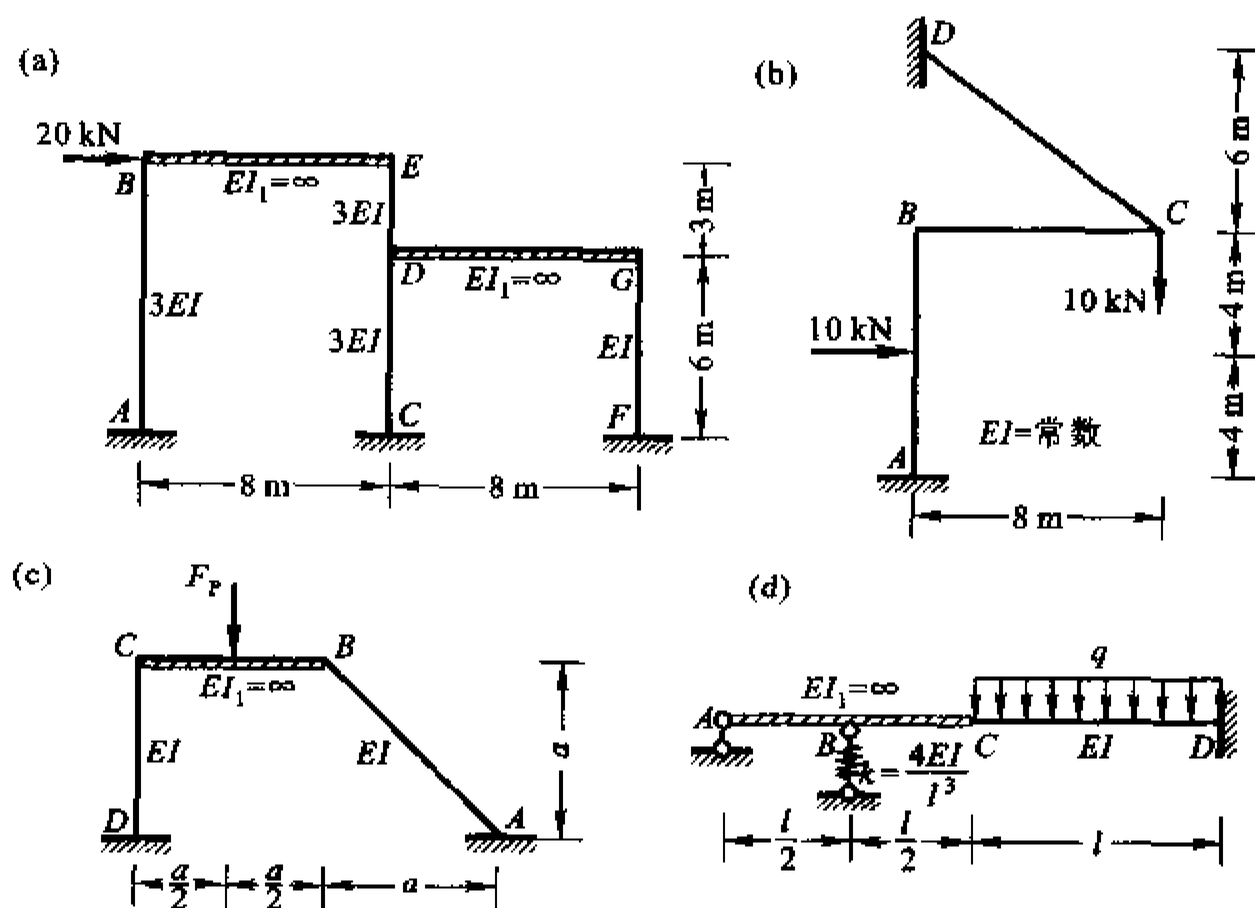
题 7-6 图

7-7 试分析以下结构内力的特点，并说明原因。若考虑杆件的轴向变形，结构内力有何变化？



题 7－7 图

7－8　试计算图示具有牵连位移关系的结构，并绘出 M 图。

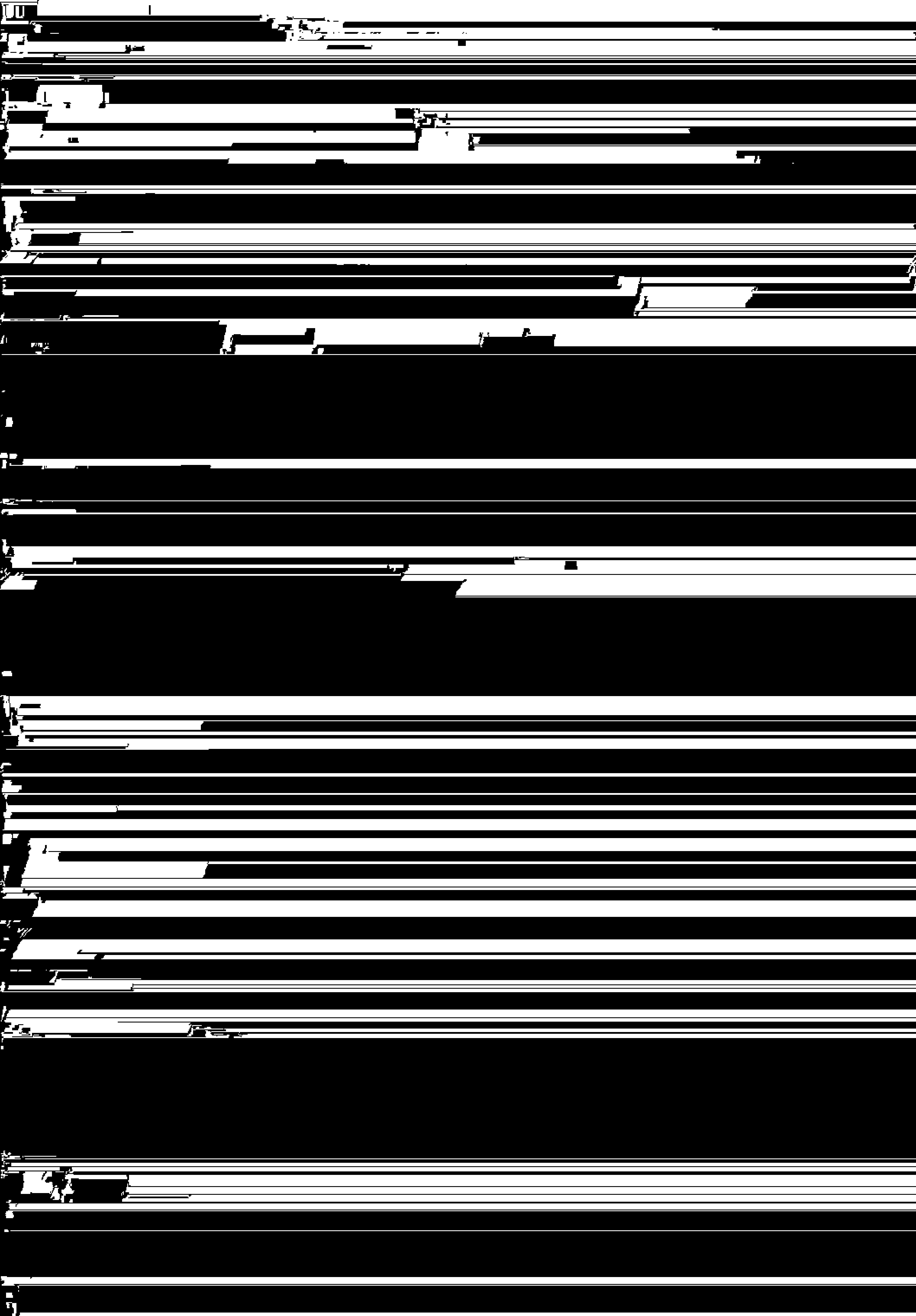


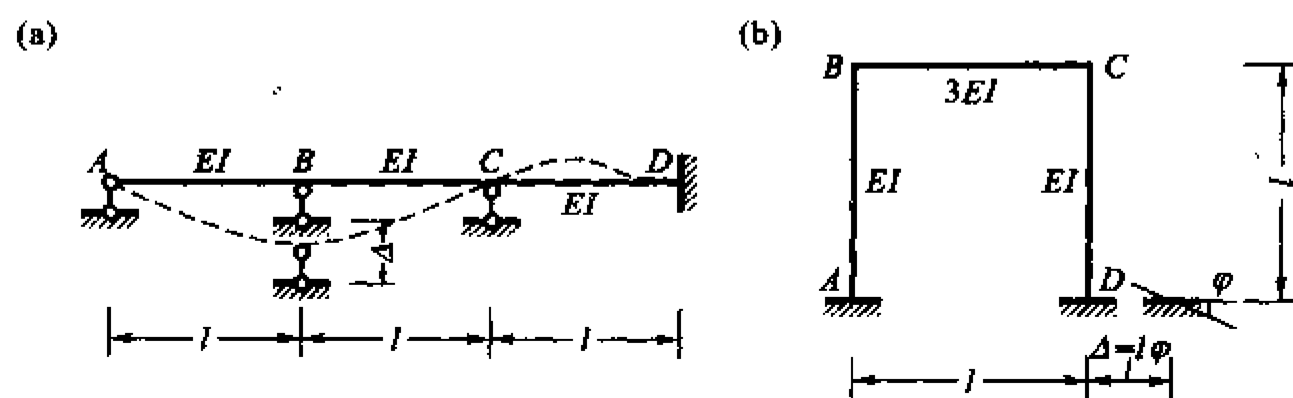
题 7－8 图

7－9　试不经计算迅速画出图示结构的弯矩图形。

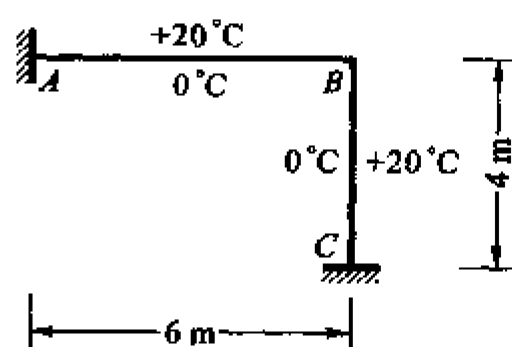
7－10　试计算图示有剪力静定杆的刚架，并绘出 M 图。

7－11　试利用对称性计算图示刚架，并绘出 M 图。



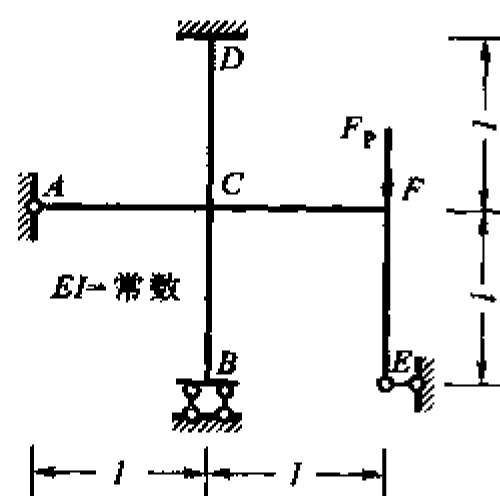


题 7－12 图



题 7－13 图

7－14　试用混合法绘制图示刚架 M 图。



题 7－14 图

附录A 铁路和公路的标准荷载制

A－1 铁路标准荷载

中华人民共和国铁路标准荷载简称“中—活载”，它包括普通荷载和特殊荷载两种移动荷载组，分别如图A－1a、b所示。普通活载是代表一般的列车荷载，前面五个集中荷载代表一台机车的五个轴重，轴距为1.5 m；中部一段30 m长的均布荷载代表煤水车及与之联挂的另一台机车及煤车的平均质量；后面任意长的均布荷载代表车辆的平均重量。特殊荷载代表某些机车、车辆的较大轴重。

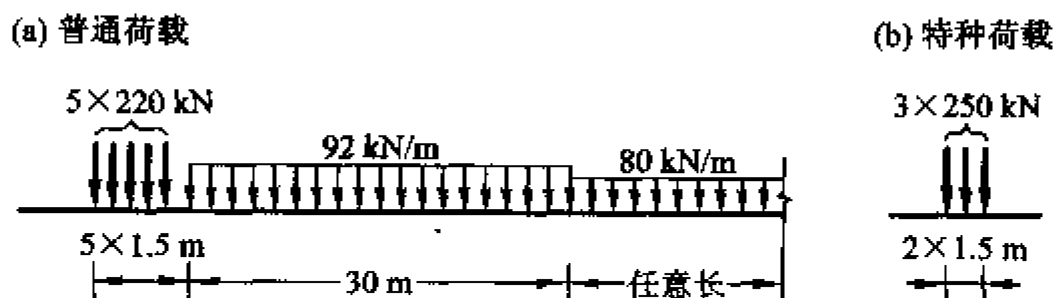


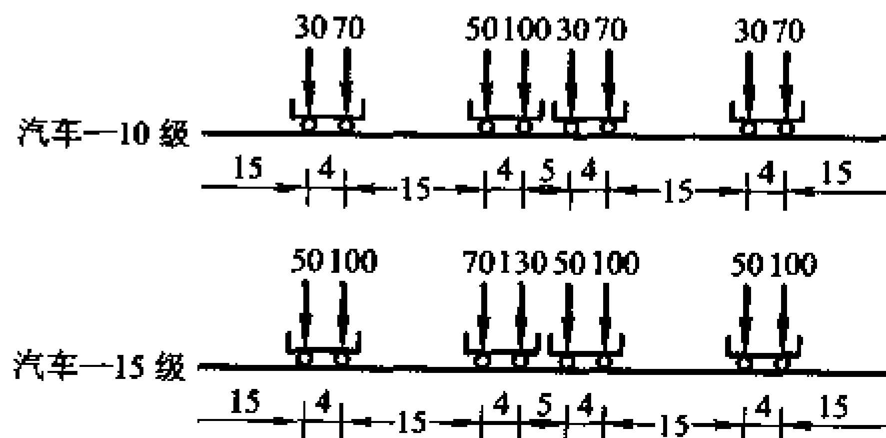
图 A－1

在进行铁路桥涵设计时，应视普通活载与特种活载哪一个产生的内力较大，就作为设计的控制荷载。特种活载虽轴重较大，但轴数较少，因此仅对短跨度(约7 m以下)控制设计。

使用“中—活载”时，可由图式中任意截取，但不得变更轴距。列车可由左端或右端进入桥梁，视何种方式产生更大的内力为准。图A－1所示为一个车道(一线)上的荷载，若桥梁是单线的且有两片主梁，则每片主梁承受图示荷载的一半。

A－2 公路标准荷载

中华人民共和国公路标准荷载分为计算荷载和验算荷载两种。计算荷载是以汽车车队表示的移动荷载组，分为汽车—10级、汽车—15级、汽车—20级和汽车—超20级四个等级，其纵向排列如图A－2所示，各车辆之间的距离可任意变更但不得小于图示距离。每个车队中重车只有一辆，其他为主车数目不限。验算荷载以履带车(均布荷载)、平板挂车表示，有履带—50、挂车—80、挂车—100和挂车—120等，详见公路工程的设计规范及技术标准，此处从略。



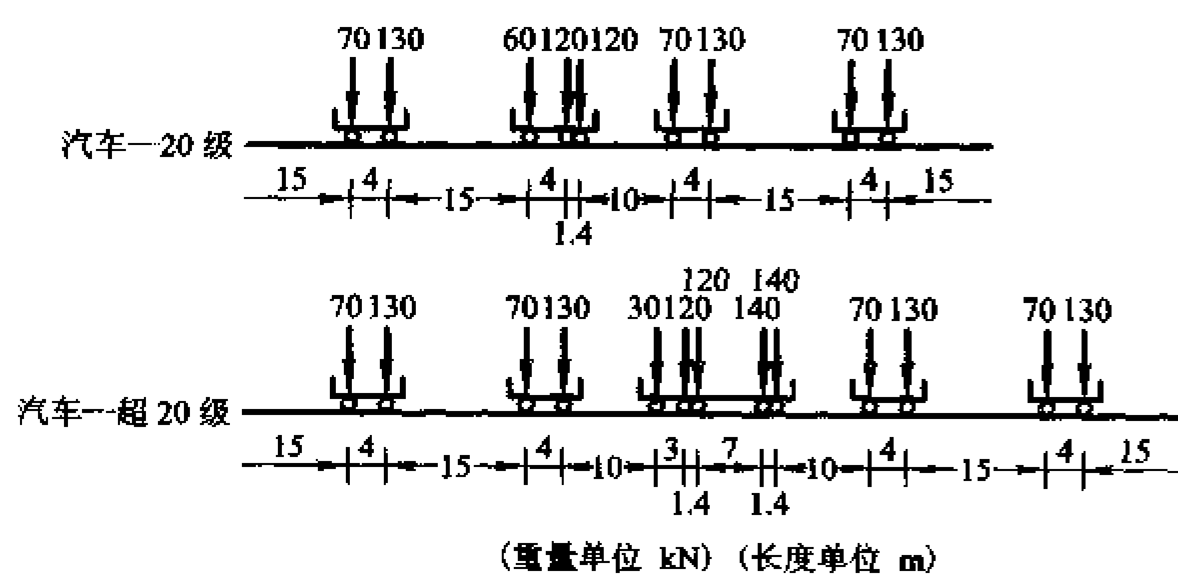

70 130
60 120 120
70 130
70 130
汽车—20 级
15
4
15
4
1.4
10
4
15
4
15
70 130
70 130
30 120
120 140
140
70 130
70 130
汽车—超 20 级
15
4
15
4
10
3
1.4
7
1.4
10
4
15
4
15
(重量单位 kN)(长度单位 m)

图　A-2

附录B 习题答案

第2章

2-2 (a) $W=0$,几何瞬变。

(b) $W=1$,几何可变。

(c) $W=-1$,几何不变,有一个多余约束。

(d) $W=1$,几何可变。

2-3 (a) 几何不变,无多余约束。

(b) 几何不变,无多余约束。

2-4 (a) 几何不变,无多余约束。

(b) 几何不变,无多余约束。

(c) 几何不变,无多余约束。

(d) 几何不变,有一个多余约束。

(e) 几何瞬变。

(f) 内部几何不变,无多余约束。

(g) 几何瞬变。

(h) 几何不变,有一个多余约束。

2-5 (a) 几何瞬变。

(b) 几何不变,无多余约束。

2-8 (a) 几何不变,无多余约束。

(b) 几何不变,无多余约束。

(c) 几何瞬变。

(d) 几何不变,无多余约束。

第3章

3-2 (a) $M_C=\dfrac{F_P a}{2}$ (上边受拉),$F_{QF}=\dfrac{F_P}{2}$。

(b) $M_B=20\ \text{kN}\cdot\text{m}$ (上边受拉),$F_{QC}=0$。

(c) $M_A=210\ \text{kN}\cdot\text{m}$ (下边受拉),$F_{QC}=-60\ \text{kN}$。

(d) $M_A=7.5\ \text{kN}\cdot\text{m}$ (上边受拉),$F_{QA}=2.5\ \text{kN}$。

3-3 (a) $M_D-16\ \text{kN}\cdot\text{m}$ (左侧受拉),$F_{QD}=6\ \text{kN}$,$F_{ND}=2\ \text{kN}$(压力)。

(b) $M_A=210\ \text{kN}\cdot\text{m}$ (左侧受拉),$F_{QA}=110\ \text{kN}$,$F_{NA}=0$。

(c) $M_B=6\ \text{kN}\cdot\text{m}$ (外侧受拉),$F_{QBC}=7\ \text{kN}$,$F_{NBC}=4\ \text{kN}$ (压力)。

(d) $M_A=4\ \text{kN}\cdot\text{m}$ (外侧受拉),$F_{QAC}=4\ \text{kN}$,$F_{NAB}=0$。

(e) $M_{DC}=8\ \text{kN}\cdot\text{m}$ (左侧受拉),$F_{QDC}=0$,$F_{NDC}=0$。

(f) $M_B=22\ \text{kN}\cdot\text{m}$(内侧受拉),$F_{QBA}=-0.6\ \text{kN}$,$F_{NAB}=0.8\ \text{kN}$(拉力)。

(b) $M_{tBC}=\frac{qa^2}{2}$，$M_{tAB}=0$。

3－18 (a) 斜杆轴力为 $-\frac{\sqrt{6}}{8}F_P$。

(b) $F_{NAC}=2$ kN，$F_{NAB}=2.5$ kN，$F_{NBE}=-1$ kN。

第4章

4－5 (a)$M_A=-x$ (坐标原点设在 A 点处)，$F_{QA}=1$。

(b) $F_{RB}=x$(坐标原点设在 A 点处)，$M_C=\begin{cases}\frac{x}{l}(l-a) & 0\leqslant x\leqslant a\\ \left(1-\frac{x}{l}\right)a & a\leqslant x\leqslant l\end{cases}$。

(c) $F_{NCD}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$M_E=0$，$M_C=0$ (均为 C 点处值)。

(d) $M_C=\frac{3}{2}$ m(C 点处值)。

(e) $F_{QA}^L=-1$ (A 点左侧值)，$F_{QA}^R=1$(A 点右侧值)，$M_C=4a$(A 点处值)。

(f) $F_{RA}=1$(A 点处值)，$F_{QB}=-1$(B 点左侧值)，$M_E=\frac{a}{2}$(E 点处值)。

4－6 (a) $F_{RD}=1$(D 点处值)，$M_C=-2$ m(F 点处值)，$M_H=1$ m(H 点处值)。

(b) $F_{RB}=1$(B 点处值)，$M_A=-3$ m(E 点处值)，$M_I=1$ m(I 点处值)。

(c) $F_{QE}=-1$(E 点左侧值)，$F_{QF}=\frac{1}{2}$(F 点右侧值)，$M_C=3d$(D 点处值)，$F_{QC}^R=1$(C 点右侧值)。

(d) $F_{QA}=1$(A 点处值)，$M_D=\frac{3}{4}$m(D 点处值)，$F_{QD}^L=\frac{7}{15}$(G 点处值)，$F_{QF}^R=1$(F 点右侧值)。

4－7 (a) $M_C=2$ m(1 点处值)，$F_{QC}=-\frac{1}{3}$(1 点处值)。

(b) $F_{QC}^L=\frac{1}{2}$，$F_{QC}^R=-\frac{1}{2}$(均为 C 点处值)。

4－8 (a) $F_{QBD}=\frac{5}{7}$(A 点处值)，$M_{DC}=2d$(A 点处值，以右侧受拉为正)。

(b) $M_E=-a$(F 点处值，以左侧受拉为正)，$F_{NE}=-1$(F 点处值)。

4－9 (a) 上承荷载时：$F_{N1}=2.4$(D 点处值)，$F_{N2}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$($C$ 点处值)，$F_{N3}=-2$(D 点处值)。

(b) 下承荷载时：$F_{N3}=\frac{11}{16}$(K 点处值)。

4－10 $F_{N1}=1.5$(中点处值)，$M_K=2.505$ m(K 点处值)，$F_{QK}=0.125$(K 点右侧值)。

4－11 (a) $M_K=58.8$ kN·m，$F_{QK}^R=-19.7$ kN。

(b) $M_K=2qa^2$(上边受拉)，$F_{QK}^R=0$。

4－13 $F_{yB(max)}=548.62$ kN。

4－14 (1) $M_{C(max)}=375$ kN·m。

(2) $F_{QD(max)}=-65$ kN。

4－15 $F_{yB(max)}=264.6$ kN。

4－17 (a) 绝对最大弯矩为 355.6 kN·m，跨中截面最大弯矩为 350.0 kN·m。

(b) 绝对最大弯矩为 1 411.3 kN·m。

第5章

5-3 $\Delta_{yC}=\dfrac{6.83F_Pa}{EA}(\downarrow)$。

5-4 $\Delta_{yC}=1.15\ \text{cm}(\downarrow)$。

5-5 $\Delta_{\theta B}=\dfrac{(12-4\sqrt{2})\text{kN}}{EA}$()()。

5-6 (a) $\Delta_{yB}=\dfrac{11q_1l^4}{120EI}+\dfrac{q_2l^4}{30EI}(\downarrow)$。

(b) $\Delta_{yC}=\dfrac{27ql^4}{16EI}(\downarrow)$。

(c) $\theta_B=\dfrac{1.42\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$(⟳)。

(d) $\Delta_{xB}=\dfrac{qR^4}{2EI}(\leftarrow)$。

5-7 (a) $\Delta_{yC}=\dfrac{81\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}(\downarrow)$。

(b) $\Delta_{yD}=\dfrac{5\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{2EI}(\downarrow)$。

(c) $\Delta_{xC}=\dfrac{918\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}(\rightarrow)$。

(d) $\Delta_{xE}=\dfrac{280\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{3EI}(\rightarrow)$。

(e) $\theta_D=-\dfrac{62\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{3EI}+\dfrac{27}{16k}\ \text{kN}\cdot m^{-1}$(⟳)。

(f) $\Delta_{yE}=\dfrac{4.103ql^4}{EI}(\downarrow)$。

5-9 (a) $\Delta_{xB}=230\alpha l(\rightarrow)$。

(b) $\Delta_{CD}=54.5\alpha t(\rightarrow\leftarrow)$。

5-10 (a) $\Delta_{\theta C}=\dfrac{a}{h}$(⟳)。

(b) $\Delta_{yC}=\dfrac{3c_2}{2}-\dfrac{c_1}{2}(\downarrow)$，$\Delta_{\theta C}=\dfrac{3c_1}{4a}+\dfrac{c_3}{2a}-\dfrac{5c_2}{4a}$()()。

5-11 每根上弦杆加长$\dfrac{11}{6}$ cm。

5-12 $\Delta_{yC}=1.37\ \text{cm}(\downarrow)$。

5-14 $\Delta_{yC}=\dfrac{5ql^4}{384EI}(\downarrow)$。

第6章

6-1 (a) 二次超静定。

(b) 六次超静定。

(c) 四次超静定。

(d) 三次超静定。

(e) 九次超静定。

(f) 二十一次超静定。

(g) 四次超静定。

(h) 三次超静定。

6-3 (a) $F_{yB}=\frac{F_P}{2}(\uparrow)$。

(b) $M_B=\frac{3}{44}F_Pl$(下边受拉)。

6-4 (a) $M_{AB}=7.2\ \mathrm{kN\cdot m}$(左侧受拉)。

(b) $M_{AC}=10\ qa^2$(左侧受拉),$M_{EC}=2\ qa^2$(上边受拉),$F_{QCE}=-0.896\ qa$。

6-5 (a) $M_{AB}=0$ (左侧受拉),$M_{BA}=4.5\ \mathrm{kN\cdot m}$ (左侧受拉)。

(b) $M_{CA}=90\ \mathrm{kN\cdot m}$ (下边受拉),$M_{CB}=120\ \mathrm{kN\cdot m}$ (下边受拉)。

(c) $F_{NCD}=1.29\ \mathrm{kN}$ (拉力)。

(d) $F_{NDE}=-17.39\ \mathrm{kN}$ (压力),$M_{AD}=248.5\ \mathrm{kN\cdot m}$ (左侧受拉)。

6-6 (a) $F_{N1}=-1.387\ F_P$,$F_{N2}=0.613\ F_P$。

(b) $F_{N1}=58.35\ \mathrm{kN}$。

6-7 (a) $M_A=\frac{3}{7}F_Pl$(上边受拉)。

(b) $F_{NCD}=\frac{3qa}{28}$。

6-8 (a) $M_{AD}=\frac{9}{4}F_P$(左侧受拉)。

(b) $M_{AC}=30.94\ \mathrm{kN\cdot m}$ (外侧受拉),$M_{CD}=34.26\ \mathrm{kN\cdot m}$ (下边受拉)。

(c) 角点弯矩$\frac{ql^2}{24}$ (外侧受拉)。

(d) 角点弯矩$\frac{ql^2}{36}$ (外侧受拉)。

(e) $M_{EC}=90\ \mathrm{kN\cdot m}$ (内侧受拉),$M_{CA}=150\ \mathrm{kN\cdot m}$ (内侧受拉)。

(f) $M_{AD}=\frac{F_Pa}{2}$ (内侧受拉),$M_{GD}=\frac{F_Pa}{2}$ (外侧受拉)。

(g) $M_{CA}=M_{CF}=\frac{5}{48}F_Pa$ (右侧受拉)。

(h) $M_{BA}=\frac{F_Ph}{2}$ (内侧受拉)。

6-10 (a) $M_D=\frac{2.5\Delta}{l^2}EI$ (下边受拉)。

(b) $M_{AC}=\frac{9\Delta}{268a^2}EI$ (外侧受拉)。

6-11 (a) $M_{AB}=\frac{510\alpha}{l}EI$ (左侧受拉)。

(b) $M_{BA}=\frac{77.5\alpha}{l}EI$ (下边受拉)。

6-12 $l_{AB}=l-\frac{11}{12}\Delta$。

6-13 $M_{AB}=0.270F_Pl$,$M_{tAB}=-0.084F_Pl$。

6－14　$\Delta_{\theta B}=206.5\alpha$()()。

6－16　$F_H=\frac{F_P}{\pi}$。

第7章

7－1　(a) 一个角位移未知量。

(b) 三个角位移未知量，一个线位移未知量。

(c) 四个角位移未知量，三个线位移未知量。

(d) 三个角位移未知量，一个线位移未知量。

(e) 一个角位移未知量，一个线位移未知量；或两个线位移未知量。

(f) 三个角位移未知量，两个线位移未知量。

(g) 一个角位移未知量，一个线位移未知量。

(h) 一个角位移未知量，一个线位移未知量。

(i) 三个角位移未知量，一个线位移未知量。

7－5　(a) $M_{DC}=-\frac{7ql^2}{24}$，$M_{DB}=\frac{ql^2}{6}$，$F_{QAD}=-\frac{ql}{8}$。

(b) $M_{BA}=26$ kN·m（上边受拉），$M_{BC}=14$ kN·m（左侧受拉）。

(c) $M_{AD}=\frac{9}{4}F_P$（左侧受拉）。

(d) $F_{NBE}=0.6F_P$，$F_{NCF}=1.2F_P$，$M_{BA}=0.6F_Pa$（上边受拉）。

(e) $F_{NDC}=\frac{1+2\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})}F_P$，$F_{NAC}=\frac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})}F_P$。

7－6　(a) $M_{AC}=35.16$ kN·m（上边受拉），$M_{CA}=19.68$ kN·m（上边受拉）。

(b) $M_{AB}=20$ kN·m（上边受拉），$M_{CD}=75.45$ kN·m（上边受拉）。

(c) $M_{EF}=25.26$ kN·m（上边受拉），$M_{AF}=6.32$ kN·m（下边受拉）。

(d) $M_{AB}=0.111ql^2$（左侧受拉），$M_{CD}=0.231ql^2$（左侧受拉）。

(e) $M_B=7.28$ kN·m（下边受拉），$M_C^L=26.8ql^2$（上边受拉），$M_C^R=16.8ql^2$（上边受拉）。

7－7　忽略杆件轴向变形时，仅(d)横梁上有三种内力（角点弯矩为零），(f)上横杆有弯矩和剪力，其余均仅有轴力。

7－8　(a) $M_{AB}=18.53$ kN·m（左侧受拉），$M_{FG}=11.91$ kN·m（左侧受拉）。

(b) $M_{AB}=13.47$ kN·m（左侧受拉），$M_{BC}=6.53$ kN·m（上边受拉）。

(c) $M_{AB}=0.06F_Pa$（右侧受拉），$M_{CD}=0.104F_Pa$（外侧受拉）。

(d) $M_C=\frac{41}{348}ql^2$（下边受拉），$M_D=\frac{85}{348}ql^2$（上边受拉）。

7－10　$M_{CF}=\frac{159}{440}ql^2$（上边受拉），$M_{BD}=\frac{36}{55}ql^2$（上边受拉）。

7－11　(a) $M_{AB}=15$ kN·m（上边受拉），$M_{BA}=210$ kN·m（上边受拉）。

(b) $M_{AB}=15.24$ kN·m（外侧受拉），$M_{CA}=7.62$ kN·m（外侧受拉）。

(c) $M_{CD}=\frac{2}{11}F_Pl$（上边受拉），$M_{AB}=\frac{3}{11}F_Pl$（上边受拉）。

(d) $M_{AB}=7.15$ kN·m（右侧受拉），$M_{CB}=4.83$ kN·m（下侧受拉）。

(e) $M_{AB}=\frac{25}{3}$ kN·m（右侧受拉），$M_{CD}=\frac{50}{3}$ kN·m（外侧受拉）。

(f) $M_{AB}=\frac{100}{33}$ kN·m（上边受拉），$M_{CB}=\frac{140}{33}$ kN·m（外侧受拉）。

7-12 (a) $M_B=3.69\frac{\Delta EI}{l^2}$（下边受拉），$M_C=2.77\frac{\Delta EI}{l^2}$（上边受拉）。

(b) $M_{AB}=3.73\frac{EI\varphi}{l^2}$（内侧受拉）。

7-13 $M_{AB}=11.97$ kN·m（下边受拉），$M_{BC}=7.4$ kN·m（内侧受拉）。

7-14 $M_{CA}=\frac{3}{14}F_P l$（上边受拉），$M_{CB}=\frac{1}{14}F_P l$（左侧受拉），$M_{FC}=\frac{3}{7}F_P l$（下边受拉）。

附录C 索　引

（按汉语拼音字母排序）

H

J

K

L

N

P

Q

主要参考文献

1 金宝桢主编. 结构力学. 第3版. 北京:高等教育出版社,1986

2 龙驭球,包世华主编. 结构力学教程. 北京:高等教育出版社,2000,2001

3 杨天祥主编. 结构力学. 第2版. 北京:高等教育出版社,1986

4 王光远编著. 应用分析动力学. 北京:人民教育出版社,1981

5 杨茀康,李家宝主编. 结构力学. 第3版. 北京:高等教育出版社,1983

6 李廉锟主编. 结构力学. 第3版. 北京:高等教育出版社,1996

7 王焕定,章梓茂,景瑞编著. 结构力学. 北京:高等教育出版社,2000

8 朱伯钦,周竞欧,许哲明主编. 结构力学. 上海:同济大学出版社,1994

9 潘亦培,朱伯钦主编. 结构力学. 北京:高等教育出版社,1987

10 缪加玉. 结构力学的若干问题. 成都:成都科技大学出版社,1993

11 Timoshenko S P, Young D H. Theory of structures. 2nd ed. New York: McGraw - Hill Book Company, 1965

12 FUNG Y C. Foundations of solid structures. London: Prentice - Hall, 1965

Synopsis

This book, among the course books of tenth-five-year Chinese national program for university education, is written according to "The Fundamental Requirements for Structural Mechanics Course" which is worked out by The Mechanics Teaching Guiding Committee of The Ministry of Education. The book is intended to meet the needs of conceptional analysis and conceptional design in contemporary engineering, and it carries the following main features: taking basic concepts, fundamental principles and their applications as a key line; observing the cognitive regularity; closely relating to engineering practice and benefiting ability improvement. The book is accomplished on the basis of the author's long-term teaching, research and engineering practice, and reflects his basic idea of "Conceptional Structural Mechanics".

This book has two volumes: Volume Ⅰ (Chapter1 - 7) mainly dealing with statically determinate structures, force method and displacement method, and Volume Ⅱ (Chapter8 - 12) dealing with matrix displacement method, practical and conceptional analysis of statically indeterminate structures, dynamics, stability analysis and ultimate strength of structures. A plane frame analysis program with explanation is attached.

While writing the book, effort is paid by the author to make the basic concepts clear, the contents concise, the explanation in as simple a form as the subject allows, and to integrate the theory with practice. While introducing methods for solving problems, more attention is laid on their background principles, with the hope that students can understand the objective laws and master the essence of the objects. A CAI teaching software which vividly displays the course contents and gives rise to classroom discussion by means of cartoon has been developed.

This book can serves as the course book of Structural Mechanics in the area of civil engineering, communication engineering, hydraulic engineering, machine engineering and mechanics, etc., and a reference book for engineering technicians in relative fields.

Contents